

TEMA 8. SISTEMA DIÉDRICO. SUPERFICIES

1. REPRESENTACIÓN DE SÓLIDOS

- 1.1 PROYECCIONES DIÉDRICAS TETRAEDRO
- 1.2 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL HEXAEDRO O CUBO
- 1.3 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL OCTAEDRO
- 1.4 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL PRISMA
- 1.5 PROYECCIONES DIÉDRICAS DE LA PIRÁMIDE
- 1.6 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL CILINDRO
- 1.7 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL CONO
- 1.8 PROYECCIONES DIÉDRICAS DE LA ESFERA

2. SECCIONES PLANAS

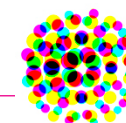
- 2.1 SECCIONES PLANAS DE POLIEDROS
- 2.2 SECCIONES PLANAS DE SUPERFICIES RADIADAS
- 2.3 SECCIONES PLANAS DE LA ESFERA

3. INTERSECCIONES DE RECTAS CON SÓLIDOS

- 3.1 INTERSECCIÓN DE RECTAS CON POLIEDROS
- 3.2 INTERSECCIÓN DE RECTAS CON SUPERFICIES RADIADAS

2.1. Valorar la importancia de la elaboración de dibujos a mano alzada para desarrollar la «visión espacial», analizando la posición relativa entre rectas, planos y superficies, identificando sus relaciones métricas para determinar el sistema de representación adecuado y la estrategia idónea que solucione los problemas de representación de cuerpos o espacios tridimensionales.

2.2. Representar poliedros regulares, pirámides, prismas, cilindros y conos mediante sus proyecciones ortográficas, analizando las posiciones singulares respecto a los planos de proyección, determinando las relaciones métricas entre sus elementos, las secciones planas principales y la verdadera magnitud o desarrollo de las superficies que los conforman.



SISTEMA DIÉDRICO. SUPERFICIES.

Así como un punto al desplazarse genera una línea, una recta al desplazarse genera una superficie, esta recta se denomina generatriz. Entendemos como superficie a los infinitos puntos de contacto que un cuerpo o volumen tiene con el espacio. Las superficies no tienen volumen propio, son simplemente un límite.

• SUPERFICIES REGLADAS:

Tienen como generatriz una línea recta

Entre las superficies regladas se pueden distinguir las **Superficies radiadas**. Son superficies geométricas y desarrollables. La ley geométrica que define a una superficie radiada es la siguiente: la generatriz desde un punto fijo propio o impropio, recorre la directriz. En el primer caso las generatrices concurren en el vértice de la superficie (cono, pirámide) y en el segundo la superficie no tiene vértice pues las generatrices son paralelas entre sí (prisma, cilindro). La directriz puede ser cualquier polígono cerrado regular o irregular o cualquier curva cerrada. (Triángulo, cuadrado, pentágono, círculo, elipse, etc.)

Dentro de las superficies radiadas podemos distinguir:

SUPERFICIES POLIÉDRICAS PIRAMIDALES.

Poliedro significa varias caras. Estas superficies tienen de base o directriz un polígono, las generatrices concurren en el vértice, que es punto propio. El cuerpo que esta superficie envuelve es la **PIRÁMIDE**.

SUPERFICIES POLIÉDRICAS PRISMÁTICAS.

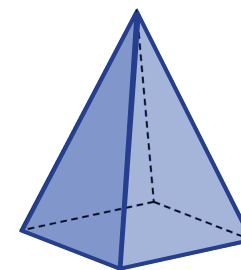
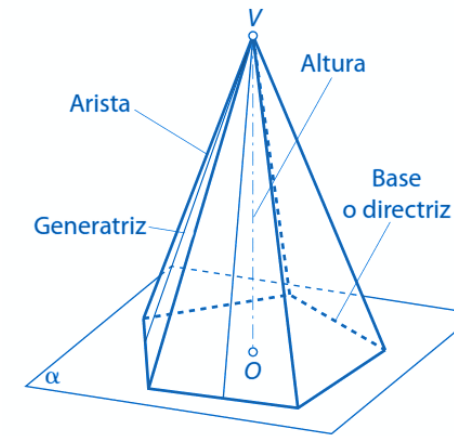
La directriz es también un polígono pero las generatrices concurren en un punto impropio o del infinito, por lo que son paralelas entre sí. El cuerpo envuelto por esta superficie es el **PRISMA**.

SUPERFICIES CÓNICAS.

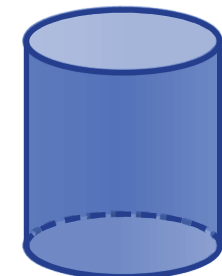
La directriz es una curva y las generatrices concurren en un punto propio. En las superficies cónicas de revolución la curva directriz es una circunferencia y por tanto, las generatrices mantienen un ángulo constante con el eje. El cuerpo envuelto por esta superficie es el **CONO**.

SUPERFICIES CILÍNDRICAS.

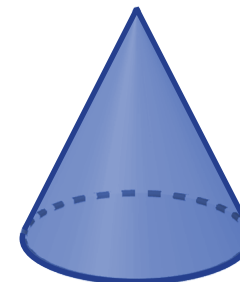
La directriz es también una curva, las generatrices son paralelas entre sí y al eje por concurrir en un punto impropio o del infinito. Al igual que en las superficies cónicas se puede distinguir entre las superficies cilíndricas de revolución y las que no lo son, en las primeras se mantienen sus generatrices a una distancia constante del eje y en las segundas no. El cuerpo envuelto por esta superficie es el **CILINDRO**.



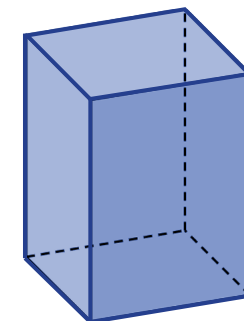
PIRÁMIDE



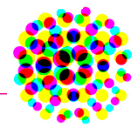
CILINDRO



CONO



PRISMA



SUPERFICIES POLIÉDRICAS

Se denominan así a las superficies que están formadas por múltiples caras planas (por ejemplo las superficies radiadas prismáticas y piramidales estudiadas). Si estas caras son todas iguales se denominan superficies poliédricas regulares y el cuerpo al que envuelven, Poliedro regular.

POLIEDROS REGULARES.

Son cinco los poliedros regulares existentes, a saber:

TETRAEDRO: Tiene cuatro caras, estas son triángulos equiláteros.

HEXAEDRO: Tiene seis caras, son cuadrados.

OCTAEDRO: Tiene ocho caras, son triángulos equiláteros.

DODECAEDRO: Formado por doce caras pentagonales.

ICOSAEDRO: Formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.

- **SUPERFICIES NO REGLADAS.**

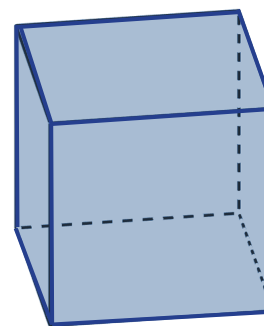
La generatriz es una línea curva. Las superficies no regladas más importantes son las de revolución generadas por una curva que gira alrededor de una recta fija denominada eje y contenida en su plano.

Destacan en este grupo:

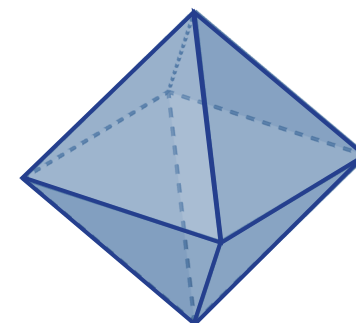
ESFERA: Su generatriz es una circunferencia girando sobre uno de sus diámetros.

TORO: Su generatriz es una circunferencia girando sobre un eje que no contiene a su centro.

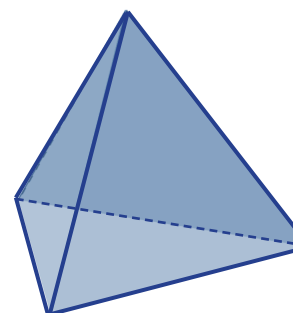
ESCOCIA: Engendrada por dos o más arcos de circunferencia tangentes entre sí.



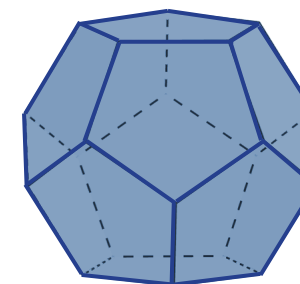
HEXAEDRO



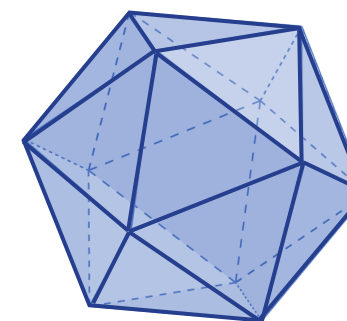
OCTAEDRO



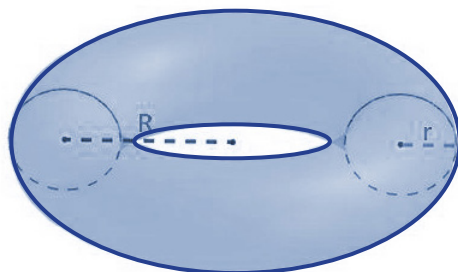
TETRAEDRO



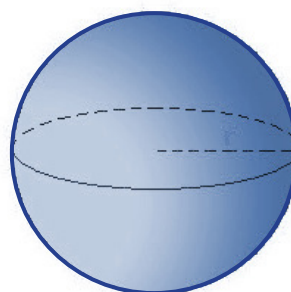
DODECAEDRO



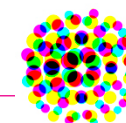
ICOSAEDRO



TORO



ESFERA



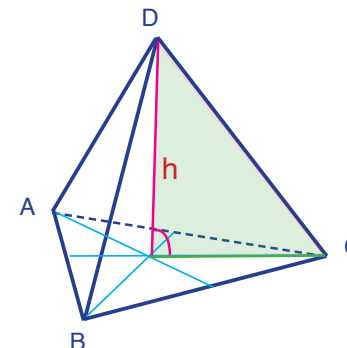
1. REPRESENTACIÓN DE SÓLIDOS

1.1 PROYECCIONES DIÉDRICAS TETRAEDRO

El tetraedro es un poliedro regular que tiene cuatro caras, estas son triángulos equiláteros.

El tetraedro es el poliedro más básico, su representación no presenta dificultad alguna, salvo la determinación de su altura.

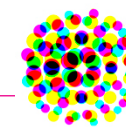
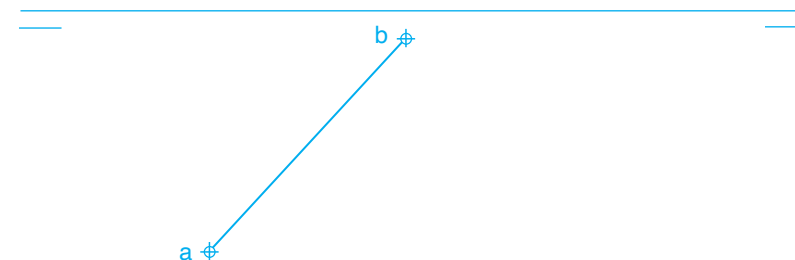
Para representar cualquier poliedro primero debemos representar su proyección sobre el plano en el que está apoyado y finalmente levantaremos sus alturas.



1.1.1 Tetraedro con una de sus caras apoyada en el plano horizontal de proyección

Dada la proyección horizontal de una de las aristas contenidas en el PHP .

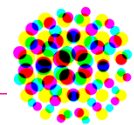
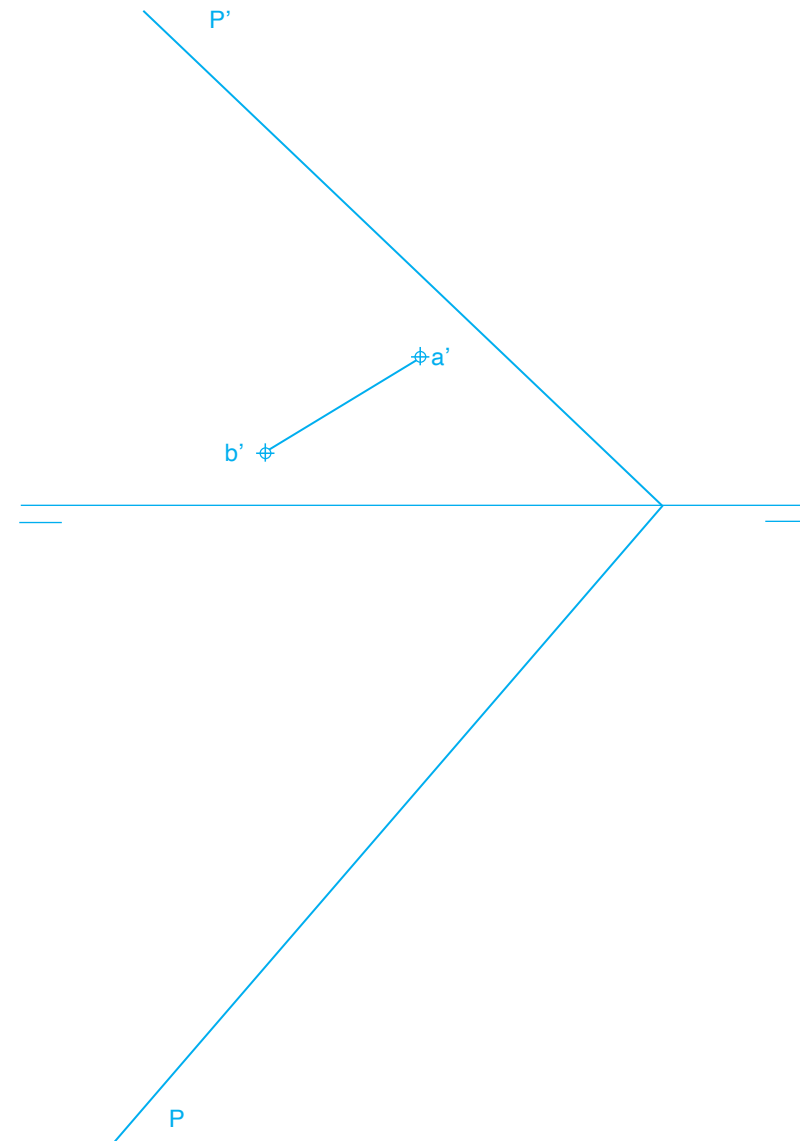
1. A partir de la arista dada representamos la cara apoyada según el triángulo equilátero $a b c$, el vértice opuesto d vendrá en proyección horizontal coincidente con el centro del triángulo.
2. La proyección vertical se obtiene refiriendo los vértices a, b y c en a', b' y c' sobre LT, puesto que son puntos contenidos en el plano horizontal.
3. La proyección del vértice d se obtiene en d' determinando su cota h , altura del tetraedro, sabiendo que constituye el cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la arista y el otro cateto es la proyección de esta arista. La construcción auxiliar se realiza en proyección horizontal, transportando en m sobre la perpendicular trazada por d la proyección $a d$, con centro en a , la longitud real de una de las aristas $a c$ del tetraedro.
4. También se puede obtener la cota h , altura del poliedro, abatiendo una de sus caras laterales tomando como charnela una de las aristas del tetraedro contenida en el PHP.



1.1.2 Tetraedro con una de sus caras apoyada en un plano oblicuo

Dado el plano P y la proyección vertical de la arista AB del tetraedro que se encuentra en dicho plano .

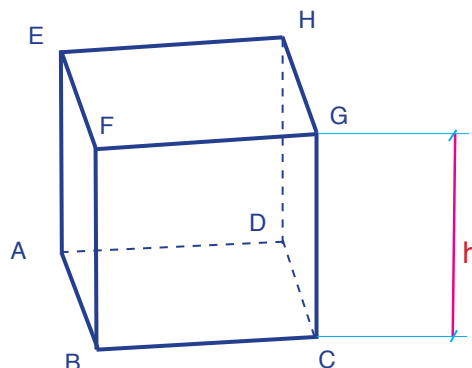
1. Se calcula la proyección ab de la arista dada, utilizando para ello rectas horizontales de plano que pasan por los extremos a' y b' .
2. Se abate el plano P sobre el P.H., tomando como charnela su traza horizontal
3. Se determina la arista AB abatida.
4. Se dibuja, con esa medida como lado, el triángulo equilátero $(A) (B) (C)$, forma real de la cara apoyada en el plano P .
5. En la misma cara abatida, se calcula su centro (O)
6. Se desabaten o levantan al plano a los puntos C y O . Primero a la proyección horizontal, utilizando la afinidad, calculando c y o , para posteriormente, utilizando horizontales de plano, determinar c' y o' .
7. El cuarto y último vértice del tetraedro, D , se encuentra en la perpendicular a la cara ABC que pasa por su centro. Para determinarlo se traza por o' , una recta perpendicular al plano P . Se toma sobre ella un punto cualquiera $X(x-x')$, calculando a continuación la verdadera magnitud del segmento OX , distancia $o'x'$, sobre la que se pueden tomar dimensiones reales.
8. La altura del poliedro, OD se ha calculado en magnitud real siguiendo el mismo método que en el ejercicio anterior. Esta distancia se lleva sobre la recta OX en verdadera magnitud y se vuelve a trasladar a su proyección obteniendo d' .
9. Conocidos los cuatro vértices, las seis aristas resultan de la unión de cada uno de ellos con los otros tres.. De ellas, la ab , en proyección horizontal, es oculta, por ser la que menor cota tiene y estar dentro del contorno aparente horizontal; y la $a'c'$ también es oculta, por esta misma razón y tener el menor alejamiento.



1.2 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL HEXAEDRO

El hexaedro es el poliedro regular de seis caras, estas caras son cuadrados. Tiene ocho vértices y doce aristas. Al unir los vértices opuestos dos a dos se obtienen cuatro diagonales que son iguales, oblicuas entre sí y que se bisecan, es decir, se cortan en el punto medio, que es el centro geométrico del poliedro. Conocida la arista, que define el cuerpo, se puede obtener la diagonal de una cara y la diagonal del poliedro, con dos sencillos triángulos rectángulos.

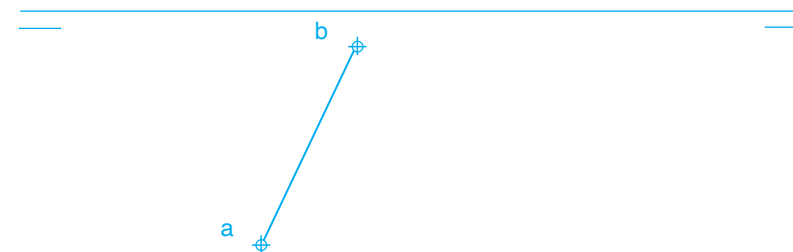
El contorno aparente en proyección horizontal es un cuadrado cuyo lado es igual a la verdadera magnitud de las aristas



1.2.1 Hexaedro con una de sus caras apoyada en el plano horizontal de proyección

Dada la proyección horizontal de una de las aristas contenidas en el PHP

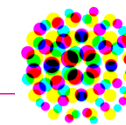
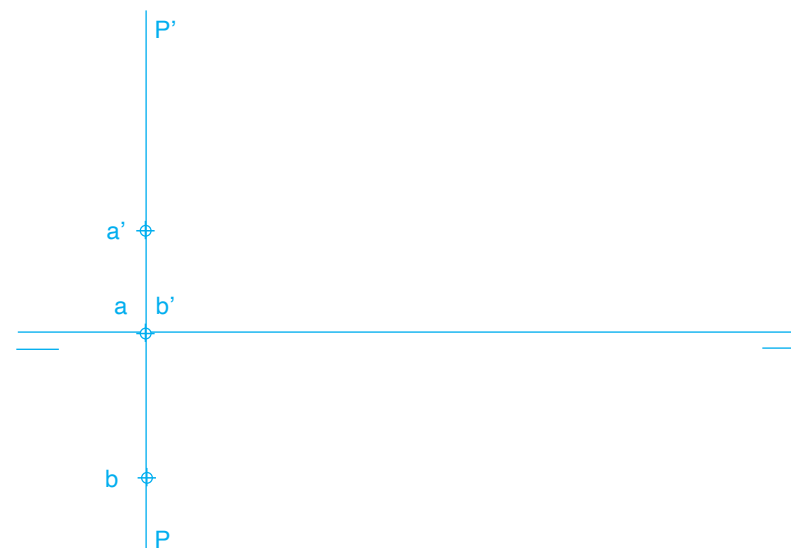
1. A partir de la arista dada representamos la cara apoyada según el cuadrado **a b c d**, los vértice opuestos **e f g h** vendrán en proyección horizontal coincidentes los de la cara apoyada en el PHP.
2. La proyección vertical se obtiene refiriendo los vértices **a, b, c y d** en **a', b', c'** y **d'** sobre LT, puesto que son puntos contenidos en el plano horizontal.
3. Las proyecciones de los vértices **e, f, g y h** se obtiene en **e', f', g'** y **h'** determinando su cota **h**, altura del hexaedro, sabiendo que es igual al lado de sus caras.



1.2.2 Hexaedro con una de sus caras apoyada en un plano de perfil

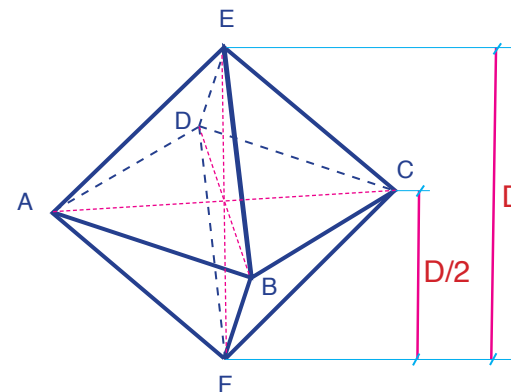
Dados el plano de perfil y las proyecciones de una de las aristas contenidas en el plano .

1. Pasamos la arista **AB** dada al plano de perfil.
2. Construimos el cuadrado de la cara apoyada sobre el plano de perfil.
3. Pasamos las aristas a sus proyecciones verticales y horizontales



1.3 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL OCTAEDRO

El octaedro regular es el poliedro formado por ocho caras triángulos equiláteros. Tiene seis vértices y doce aristas. Las tres diagonales son iguales, perpendiculares y se bisecan. Las caras opuestas son paralelas dos a dos. La arista define el poliedro y a partir de ella se puede determinar la longitud de una de sus diagonales.

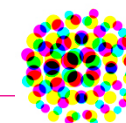
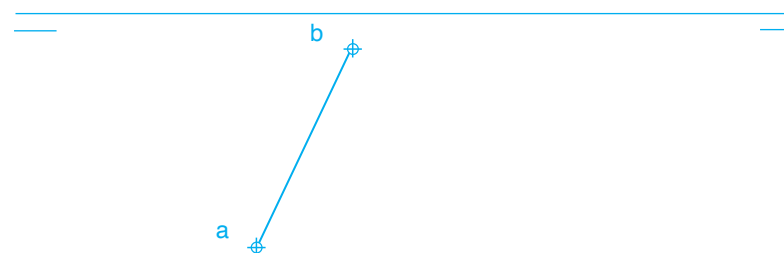


1.3.1 Octaedro apoyado en el PHP por un vértice de la arista principal, perpendicular a dicho plano.

Dada la proyección horizontal de una de las aristas contenidas en el PHP .

Cuando un octaedro está apoyado en el plano de proyección horizontal por una de sus diagonales principales, perpendicular a dicho plano, cuatro de sus aristas tienen la misma cota, por lo que estarán contenidas en un plano horizontal.

1. La proyección horizontal del octaedro se halla dibujando un cuadrado de lado **ab**, y trazando a continuación las diagonales de dicho cuadrado. Las diagonales se cortan en lo que serán los vértices **e** y **f**.
2. La proyección vertical **f'** del vértice apoyado en el plano horizontal está en la línea de tierra: la proyección vertical **e'** del vértice opuesto está a una altura igual a la diagonal **D** del cuadrado que es proyección horizontal: la altura del resto de los vértices es igual a **D/2**.
3. Se unen los vértices para completar las vistas.
4. Determinamos las aristas vistas y ocultas.



1.4 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL PRISMA

La superficie prismática es una superficie radiada, es decir, está engendrada por una recta, llamada generatriz, que trasladándose paralelamente a sí misma, se apoya sobre un polígono.

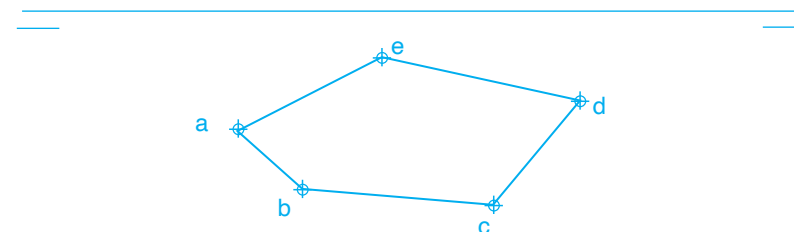
Las posiciones de la generatriz en los vértices del polígono directriz se llaman aristas laterales de la superficie.

El prisma es un sólido limitado por una superficie prismática seccionada por dos planos que cortan a todas las aristas laterales.

1.4.1 Prisma recto con la base contenida en el plano horizontal de proyección

Dado el polígono de la base contenido en plano horizontal de proyección, representar el prisma recto de 5 cm. de altura.

Las aristas laterales son rectas verticales en proyecciones diédricas. Su representación no ofrece dificultad alguna. Las aristas ocultas en proyección vertical se determinan mirando en proyección horizontal por debajo de la pieza y en proyección horizontal mirando en proyección vertical por encima de la pieza.

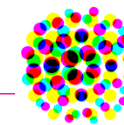
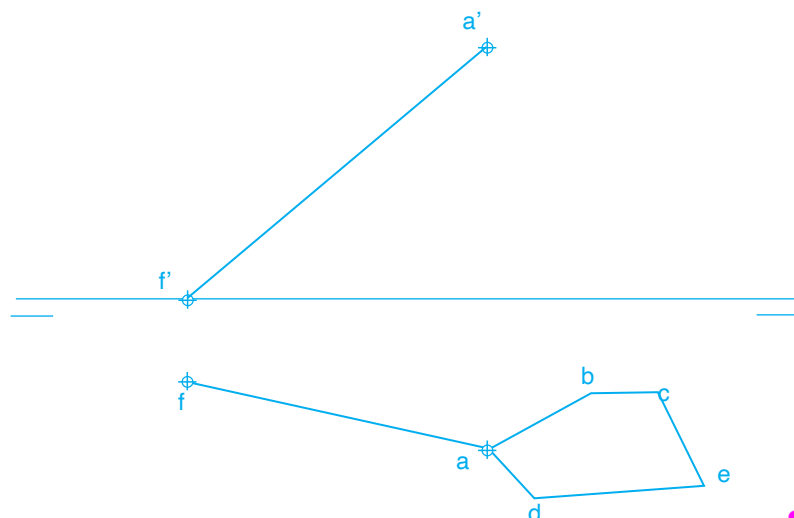


1.4.2 Prisma oblicuo con la base contenida en el plano horizontal de proyección

Dada la base superior del polígono y la proyección de la arista AF, representar el prisma oblicuo cuya base inferior está contenida en el plano horizontal de proyección.

Para ello basta trazar rectas paralelas a la arista dada por cada uno de los vértices de la base. La altura del prisma vendrá dada por la longitud de la arista dada.

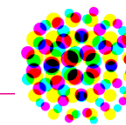
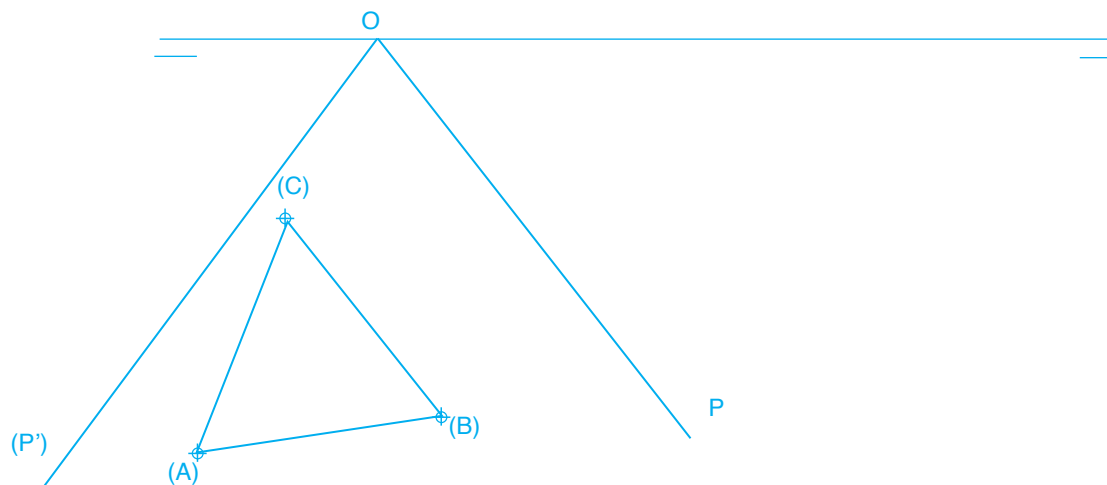
Si no nos dieran esta arista y en su lugar nos facilitaran el ángulo que forma con alguno de los planos de proyección, tendríamos que aplicar lo visto en el tema de ángulos y así determinar el valor del ángulo de la arista con los planos de proyección



1.4.3 Prisma recto con la base contenida sobre un plano oblicuo

Dado el plano P y el triángulo equilátero de la base del prisma contenido en él, abatidos sobre el plano horizontal. (altura 3 cm)

1. Desabatimos la traza P' y el triángulo ABC , determinamos las proyecciones diédricas del triángulo.
2. Trazamos por los vértices perpendiculares al plano, puesto que se trata de un prisma recto.
3. Para determinar la altura h en proyección tomamos un punto arbitrario x sobre una de las rectas perpendiculares trazadas. El segmento comprendido entre la base y el punto elegido, ax , se gira hasta situarlo frontalmente. En x' lo hemos obtenido, por tanto, en verdadera magnitud. Llevamos la altura h ($a'n'$) sobre este segmento, deshaciendo seguidamente el giro mediante una paralela a LT trazada por el extremo n' , de h , la cual nos determina el vértice n' del prisma. Finalmente se construye por n' el polígono de la base superior, paralelo al contenido sobre PP' , y se refieren los vértices a la proyección horizontal.



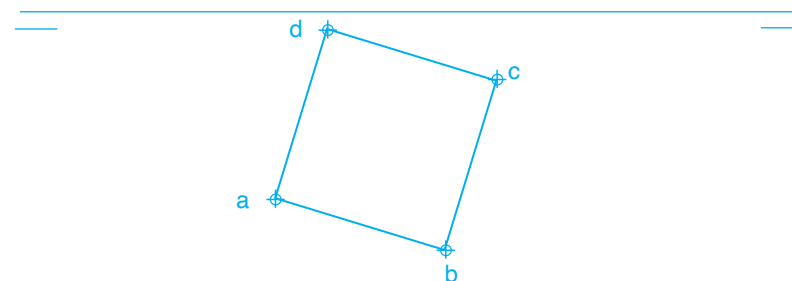
1.5 PROYECCIONES DIÉDRICAS DE LA PIRÁMIDE

La superficie piramidal es una superficie radiada, pues está engendrada por una recta que, pasando por un punto fijo, se apoya en un polígono llamado directriz. El punto de concurso de las generatrices es el vértice de la pirámide.

1.5.1 Pirámide recta con la base contenida en el plano horizontal de proyección

Dada la base cuadrangular contenida en plano horizontal de proyección, representar la pirámide recta de 5 cm. de altura.

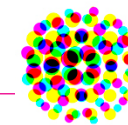
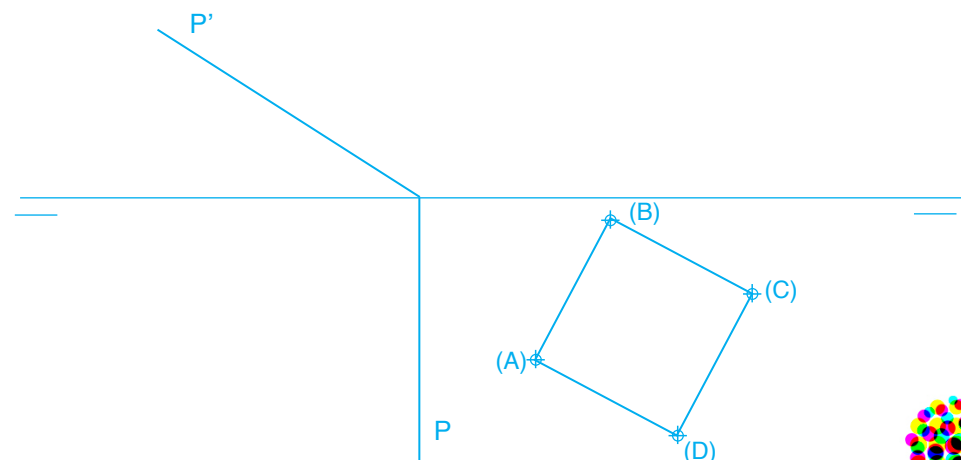
1. Determinamos el centro del cuadrado, v , que será la proyección horizontal del vértice de la pirámide.
2. Llevamos la altura de la pirámide determinando la proyección vertical del vértice v' .
3. Hallamos la proyección vertical de la base a' , b' , c' y d' sobre la LT, que unidos con v' nos dibuja las aristas del sólido.
4. Las aristas ocultas en proyección vertical se determinan mirando en proyección horizontal por debajo de la pieza y en proyección horizontal mirando en proyección vertical por encima de la pieza.



1.5.2 Pirámide recta con la base contenida en un plano proyectante

Dados la base abatida de la pirámide recta contenida en el plano P. Determinar su proyecciones, sabiendo que su altura es de 4 cm.

1. Determinamos las proyecciones verticales de los vértices de la base, que se encuentran en la traza P' del plano.
2. Determinamos el vértice de la pirámide en su proyección horizontal, v , y lo llevamos a la proyección horizontal, v' , trazando una perpendicular a P' . Al ser un plano proyectante la altura se proyecta en verdadera magnitud.
3. Unimos las proyecciones de los vértices para determinar las aristas.
4. Las aristas vistas y ocultas se determinan como en los casos anteriores.



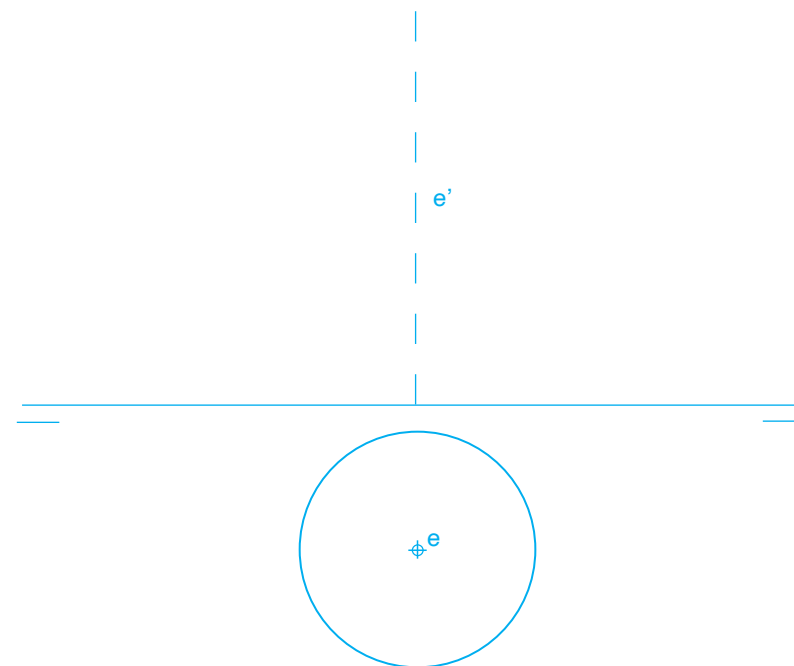
1.6 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL CILINDRO

La superficie cilíndrica es una superficie radiada, engendrada por una recta, que apoyándose sobre una curva, se traslada paralelamente a sí misma. La recta que engendra la superficie se llama generatriz Y la curva sobre la que se apoya es la directriz de la superficie. Conociendo la directriz y la dirección de las generatrices la superficie queda definida.

1.6.1 Cilindro de revolución con la base contenida en el plano horizontal de proyección

Dada la base circular contenida en plano horizontal de proyección, representar el cilindro de 5 cm. de altura.

1. Por **e** trazamos un diámetro a la base paralelo a la LT que nos determina los puntos **a** y **b** proyecciones horizontales de las generatrices que determinan el rectángulo que será la proyección vertical del cilindro.



1.6.2 cilindro de revolución tumbado sobre el plano horizontal

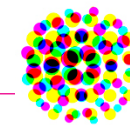
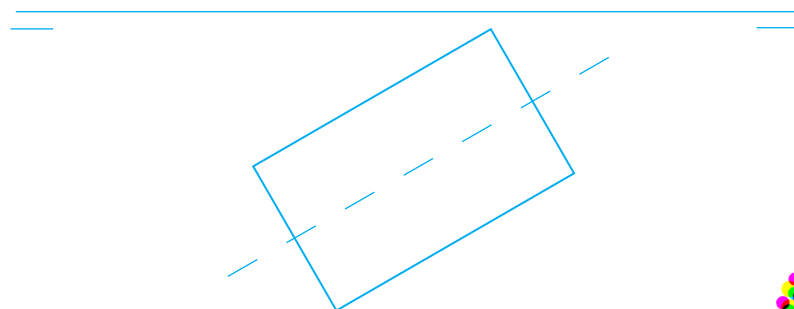
Dadas la proyección horizontal del cilindro de revolución, representar su proyección vertical.

La proyección horizontal es un rectángulo de lados el diámetro y la altura del cilindro.

En proyección vertical, las dos circunferencias bases se representan como dos elipses iguales, cuyo eje mayor es el diámetro de dichas circunferencias en magnitud real.

La longitud del eje menor de dichas elipses depende de la inclinación del cilindro con respecto al PV.

1. Determinamos las proyecciones de los ejes perpendiculares de la circunferencia, generatriz del cilindro (**a-b**, **c-d**, **e-f**, **g-h**).
2. Las proyecciones verticales de estos ejes determinan las elipses en las que se proyectan las bases del cilindro.
3. Completamos la proyección vertical uniendo los extremos de los ejes de las bases.



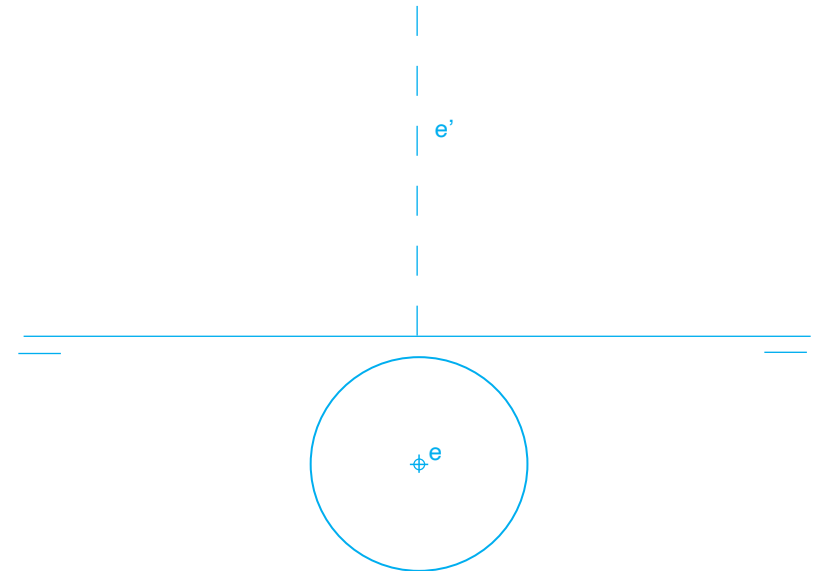
1.7 PROYECCIONES DIÉDRICAS DEL CONO

La superficie cónica está engendrada por una recta, que pasando por un punto fijo, se apoya sobre una curva, llamada directriz. El punto fijo es el vértice de la radiación y la directriz, puede ser una curva cualquiera, plana o alabeada. La superficie cónica queda definida conociendo la directriz y el vértice. Si se limita por un plano, el cuerpo que encierra esta superficie es un cono.

1.7.1 Cono de revolución con la base contenida en el plano horizontal de proyección

Dada la base circular contenida en plano horizontal de proyección, representar el cono de 4 cm. de altura.

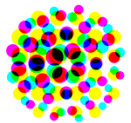
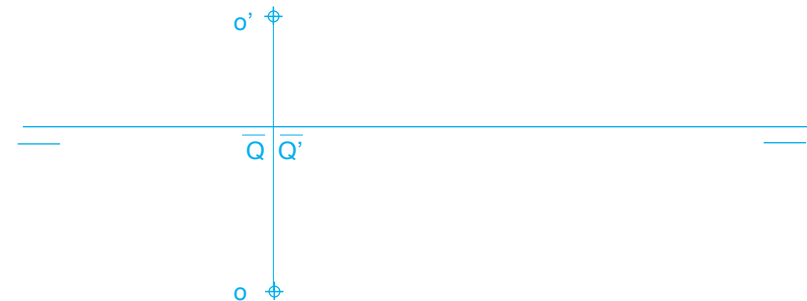
1. Por e trazamos un diámetro a la base paralelo a la LT que nos determina los puntos a y b proyecciones de las generatrices.
2. Determinamos las proyecciones a' b' sobre la línea de tierra.
3. Unimos las proyecciones a' y b' con la proyección vertical del vértice v' , situado en el eje a la altura dada.



1.7.2 Cono de revolución apoyado en un plano que pasa por la línea de tierra

Dado el centro y sabiendo que la base del cono de revolución es de 15 mm. de radio y que su vértice está en el plano vertical de proyección.

1. Dibujamos el perfil o'' del punto dado y el plano Q'' .
2. Trazamos el perfil del vértice v'' situado en el plano vertical de proyección y dibujamos sus proyecciones v v' .
3. Determinamos el perfil de la base del cono, considerando dos diámetros perpendiculares, AB y CD , siendo AB una recta paralela a la LT y CD una recta de perfil.
4. Dibujamos sus proyecciones ($a'-b'$, $c'-d'$, $a-b$, $c-d$)
5. Trazamos las elipses proyecciones de la base del cono.
6. Dibujamos desde el vértice $v-v'$ las generatrices del cono tangentes a la base
7. Los puntos de tangencia de las generatrices determinan la parte oculta de la base del cono

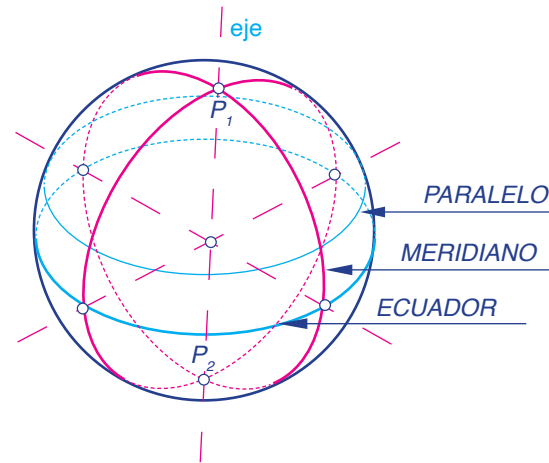


1.8 PROYECCIONES DIÉDRICAS DE UNA ESFERA

Una esfera es un sólido limitado por la superficie engendrada por una circunferencia que gira alrededor de uno de sus diámetros.

En una superficie esférica se localizan unas circunferencias cuyos nombres coinciden con los utilizados cuando nos referimos a la superficie terrestre, que, como sabemos, es aproximadamente una esfera. Un **paralelo** es una circunferencia contenida en un plano perpendicular al eje. Todos los paralelos no son iguales. El mayor de ellos, contenido en el plano perpendicular al eje que pasa por el centro O, se llama **ecuador**.

Los **meridianos** son circunferencias contenidas en planos que pasan por el eje. Todos los meridianos son iguales y su diámetro es el mismo que el de la propia esfera y el del ecuador. Son, por tanto, circunferencias máximas. Pasan por los polos P1 y P2.

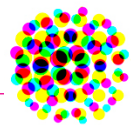


1.8.1 Esfera apoyada sobre el plano horizontal de proyección

Dadas las proyecciones del centro de la esfera

La proyección ortogonal de una esfera sobre cualquier plano es siempre una circunferencia del mismo diámetro que aquella. Por esta causa ambas proyecciones son circunferencias. En proyección horizontal se aprecia el ecuador (circunferencia horizontal que pasa por el centro O) y en proyección vertical un meridiano frontal.

1. Unimos las proyecciones oo' que nos determinan el eje de la esfera.
2. Como la esfera está apoyada en el plano horizontal de proyección, la vista vertical determina el radio de la circunferencia, que será centro o' y radio o' hasta el punto de corte del eje con la LT.
3. Con el mismo radio trazamos la proyección horizontal con centro en o .



2. SECCIONES DE SÓLIDOS

Una sección plana es la consecuencia de cortar a un sólido mediante un plano. El resultado es una porción de superficie limitada por un polígono, en los casos de poliedros, prisma y pirámide, y por una curva cónica en los casos de cono, cilindro y esfera.

Para obtener los vértices de dichos polígonos o los puntos de las curvas, se hallan las intersecciones de las aristas o de las generatrices con el plano que produce la sección.

Cuando este plano es proyectante, es decir, perpendicular a uno de los de proyección, estamos ante el caso más sencillo, porque las intersecciones entre las rectas y el plano son inmediatas. Si el plano que produce la sección es oblicuo a los de proyección, pueden seguirse tres procedimientos distintos:

1. Calcular individualmente los puntos donde cada una de las aristas o generatrices corta al plano de sección.
2. Transformar el plano que determina la sección de oblicuo a proyectante mediante un cambio de plano.
3. En los sólidos cuyas aristas o generatrices concurren en un punto, casos de tetraedro, pirámides o conos, utilizando homología. Cuando el punto de concurrencia está en el infinito, casos de cubo, prismas y cilindros, utilizando afinidad.

MÉTODOS

Para poder determinar la sección que produce un plano sobre una superficie podemos recurrir a tres métodos: mediante **planos auxiliares frontales y/o horizontales, planos proyectantes, o aplicando un cambio de plano.**

La elección de cada método dependerá del tipo de superficie a seccionar, de su ubicación respecto de los planos de proyección, y de la naturaleza del plano secante.

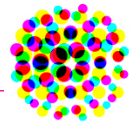
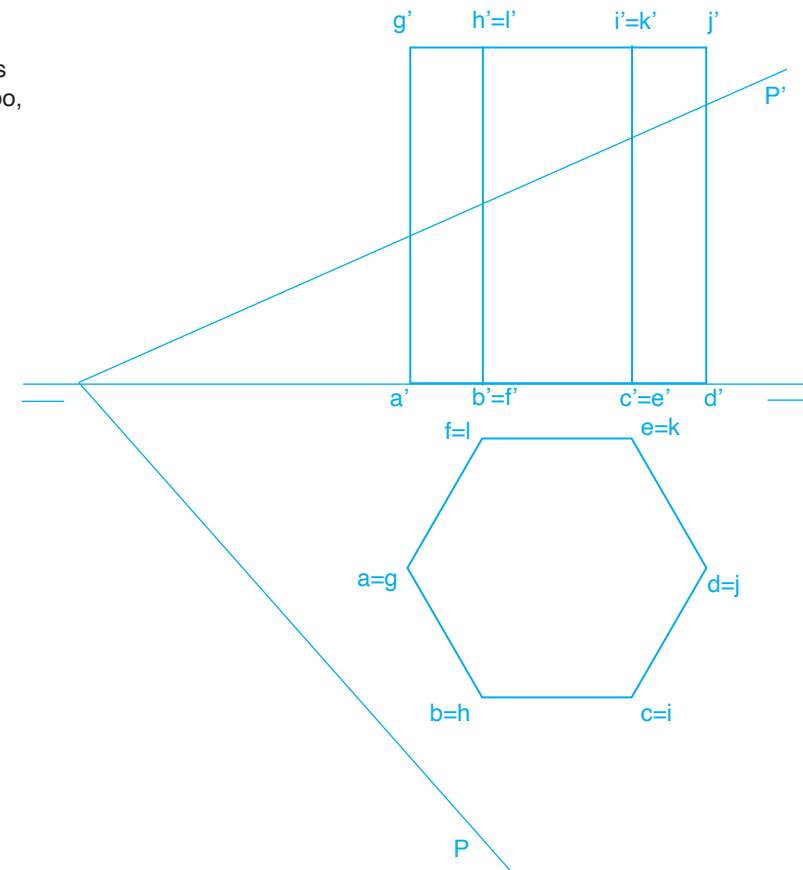
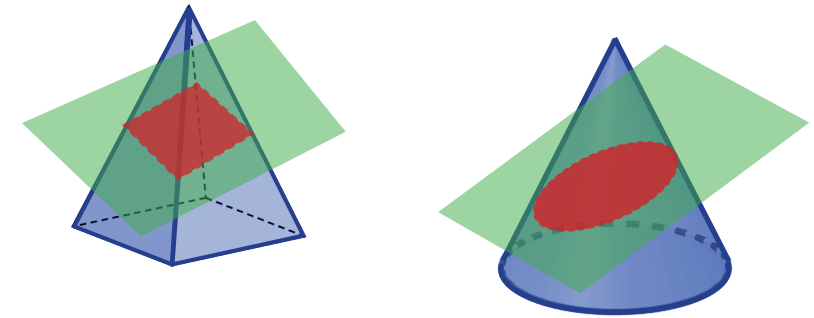
Primer método, planos auxiliares frontales.

Este primer método se aplica en todas las superficies cuyas aristas o generatrices sean perpendiculares a su base: hexaedro, prismas regulares, y cilindros.

También se puede emplear en todas aquellas superficies cuyas aristas o generatrices sean rectas frontales.

Dado el prisma recto ABCDEFGHIJKL de base hexagonal y el plano oblicuo P

1. Contemos dos de sus aristas laterales, **AG** y **DJ**, en un plano frontal y determinamos sus intersecciones con el plano **P** (1 y 2)
2. Hacemos lo mismo con las demás aristas obteniendo los puntos **3, 4, 5 y 6**.
3. Unimos las proyecciones verticales de los puntos para obtener el perímetro de la sección. Las aristas ocultas pasan por los vértices **5 y 6**.



Segundo método, planos auxiliares proyectantes.

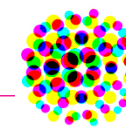
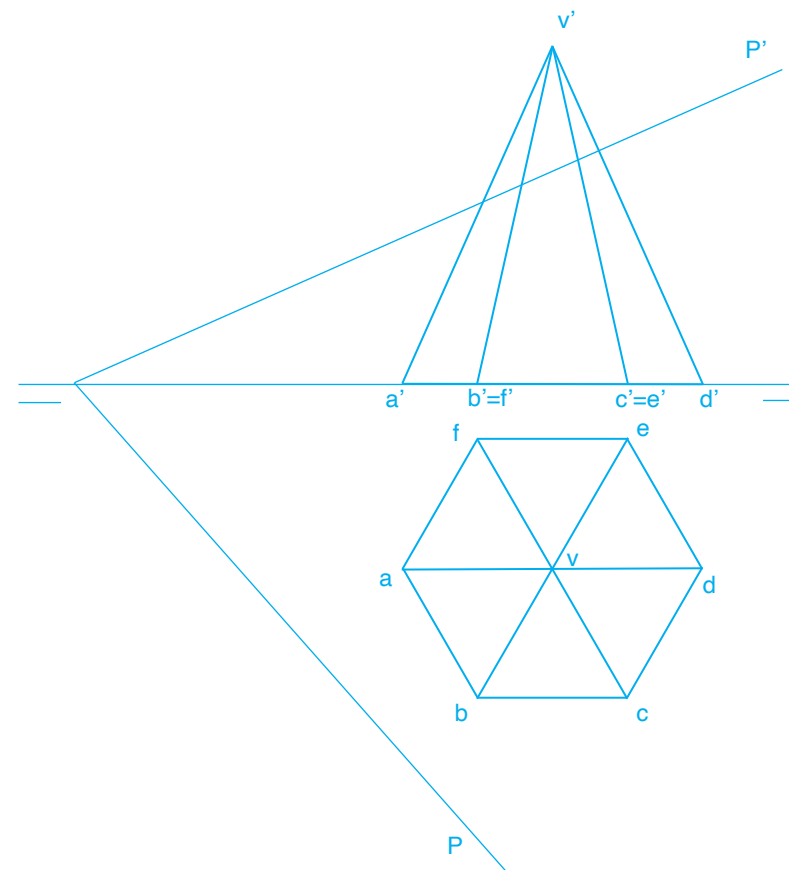
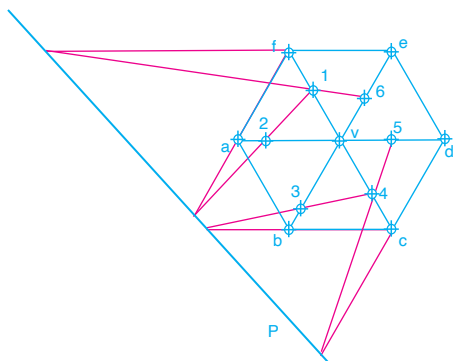
Este segundo método se emplea en cualquier superficie; pero sobre todo en aquellas cuyas aristas o generatrices no sean perpendiculares a su base: octaedro, cono y pirámide.

Dada la pirámide de base hexagonal ABCDEFV y el plano oblicuo P.

1. Contenemos dos de sus aristas laterales, **EV** y **BV**, en un plano proyectante horizontal y determinamos sus intersecciones con el plano **P** (1 y 4).
2. Contenemos las aristas **FV** en un plano proyectante verticales y obtenemos el punto **2**.
3. Repetimos este proceso con el resto de las aristas.
4. Dada la disposición de la pirámide podemos coger un plano frontal para las aristas **AV** y **DV**, determinando los puntos **3 y 6**.
5. Unimos las proyecciones de los puntos para obtener la sección. En la proyección vertical las aristas ocultas pasan por los vértices 5 y 6 que pertenecen a las aristas ocultas **EV** y **FV**.

Sección y Homología.

Cuando las aristas o generatrices de la superficie seccionada se cortan en un vértice, como es el caso del tetraedro, pirámide y cono, podemos establecer una relación de **homología entre la base de dichas superficies y su sección**; así pues, los puntos de ambos elementos serán homólogos respecto de la traza del plano secante correspondiente al plano de proyección que contiene a la base de la superficie, generalmente el horizontal; y al vértice, centro de homología.

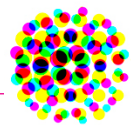
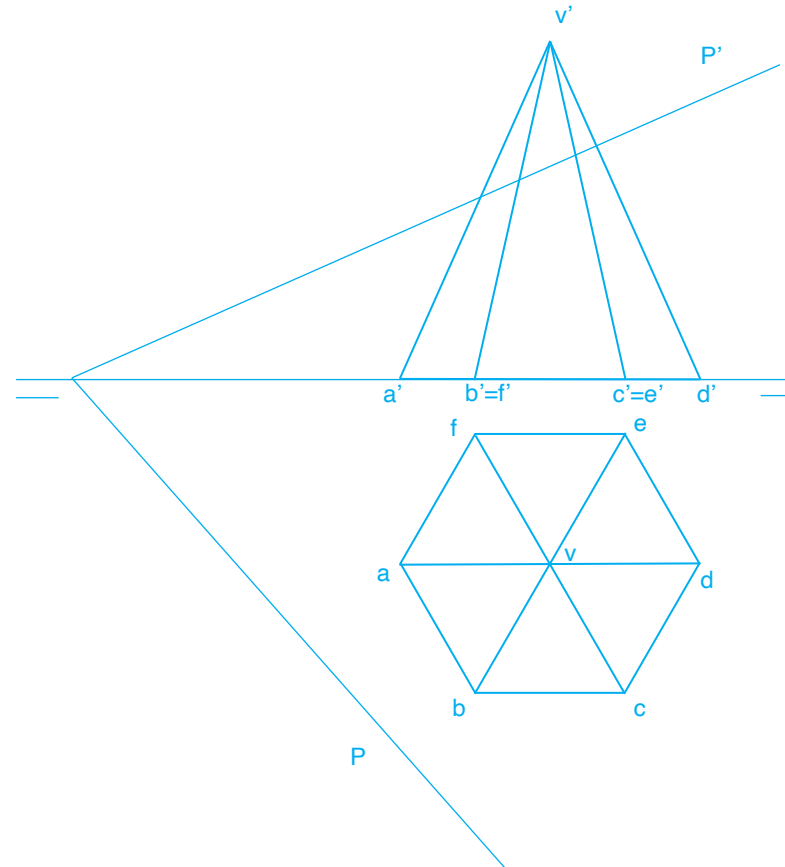


Tercer método, cambio de plano.

Este último método se aplica a cualquier superficie, poliédrica o radiada. Generalmente el cambio de plano que se emplea es vertical ya que esto ubica de una manera óptima las proyecciones diédricas que se obtienen.

Dada la pirámide de base hexagonal ABCDEFV y el plano oblicuo P.

1. Mediante un cambio de plano convertimos el plano dado en un plano proyectante vertical.
2. La intersección de la nueva proyección vertical de la pirámide con la traza P'_i determina directamente la proyección vertical de la sección.
3. Deshacemos el cambio de plano refiriendo los puntos de intersección a sus respectivas proyecciones.
4. Unimos los puntos de intersección y obtenemos el perímetro de la sección



2.1 SECCIONES PLANAS DE POLIEDROS

2.1.1 Tetraedro con un plano proyectante

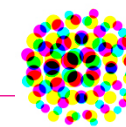
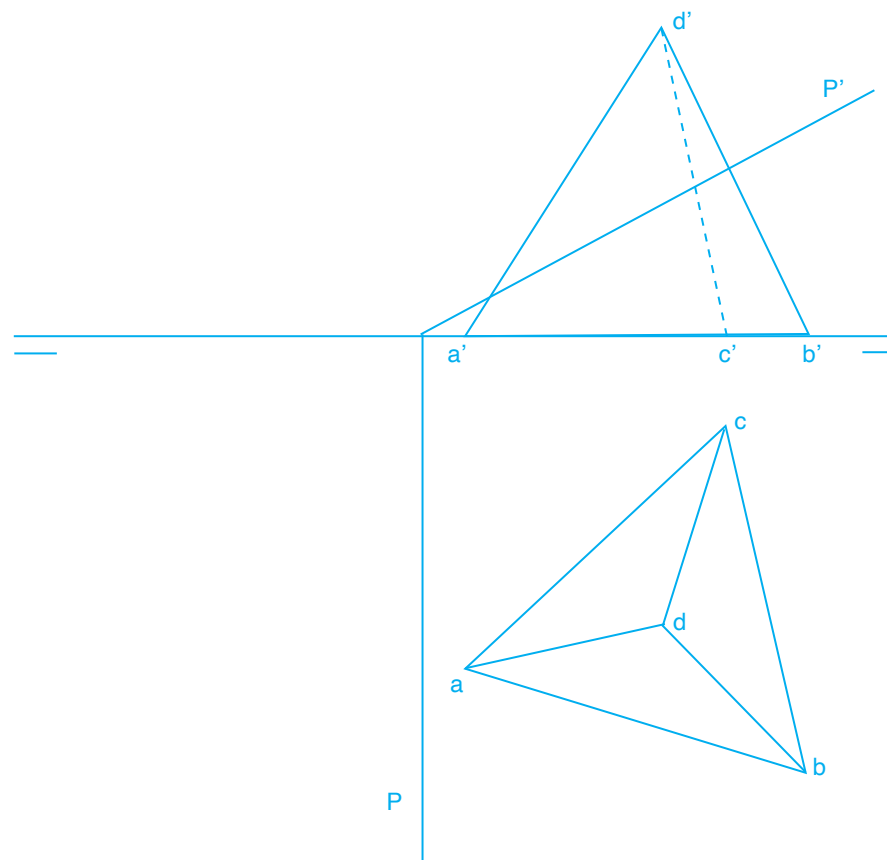
Por la cualidad que tiene este plano de ser proyectante vertical, todos los puntos, rectas o figuras planas contenidas en él se proyectan verticalmente sobre su traza vertical P' .

Cuando un plano proyectante secciona a una superficie la sección queda determinada directamente en la proyección correspondiente:

- Si el plano secante es proyectante vertical la sección se muestra de manera directa en la proyección vertical.
- Si el plano secante es proyectante horizontal la sección queda determinada directamente en la proyección horizontal.

Dadas las proyecciones del tetraedro y del plano P

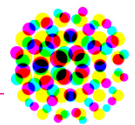
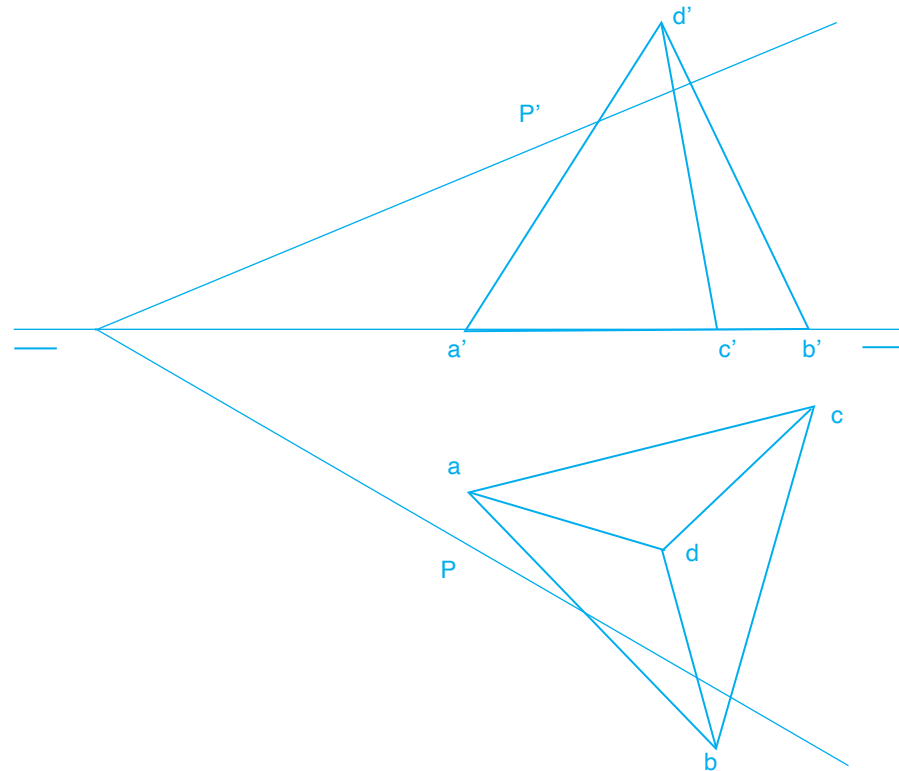
1. Se obtiene la intersección cada una de las aristas con el plano P .
2. La proyección vertical de la sección es un segmento con extremos $1'$ y $2'$, con otro punto $3'$ intercalado.
3. La proyección horizontal del polígono sección, en este caso un triángulo, se obtiene calculando los puntos 1 , 2 y 3 , a partir de sus proyecciones verticales, sobre las aristas correspondientes.
4. La magnitud real de la sección se puede calcular por diferentes procedimientos: abatimientos, giros y cambio de planos.



2.1.2 Tetraedro con un plano oblicuo

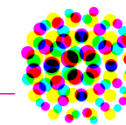
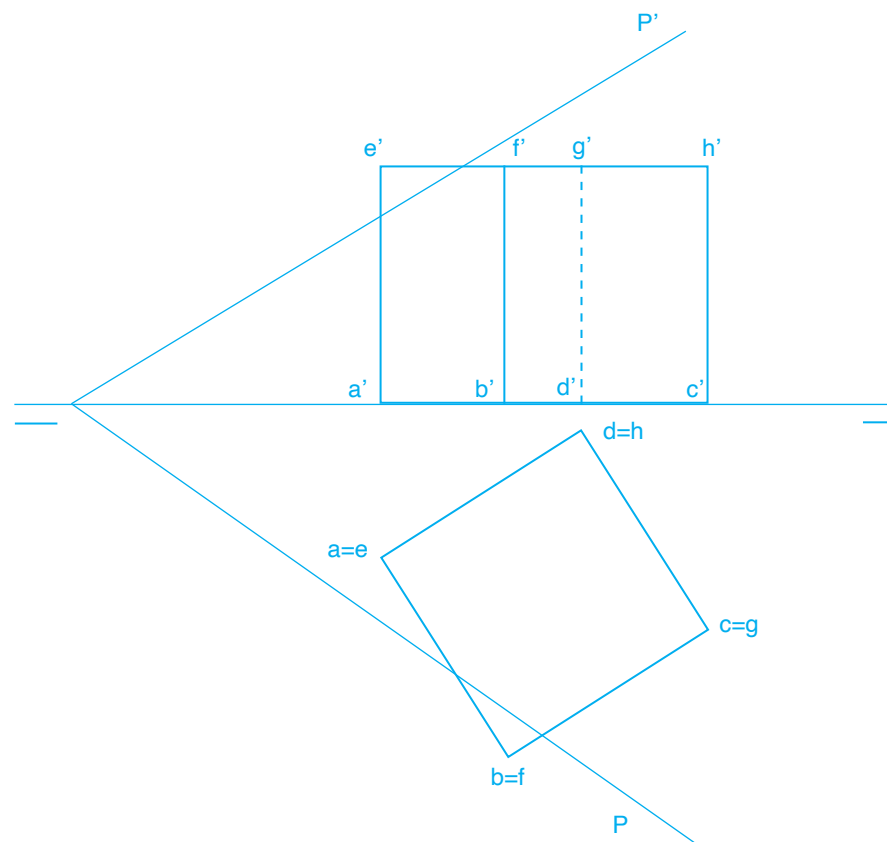
Dadas las proyecciones del tetraedro y del plano P

1. Como el plano corta a la base del tetraedro determinará dos de los puntos de intersección de manera directa.
2. Contenemos las aristas en planos proyectantes verticales y horizontales y determinamos el resto de los puntos de intersección con el plano P .
3. Unimos los puntos y obtenemos el polígono de la sección.
4. Podemos obtener la verdadera magnitud de la sección abatiendo el plano que la contiene.



2.1.3 Hexaedro con un plano oblicuo

1. Como el plano corta a la base del hexaedro determina unos vértices del polígono sección de forma directa (**1** y **2**).
2. Contenemos las aristas **AE** y **CG** en planos frontales que interseccionará con el plano **P** mediante rectas frontales, determinando los vértices del polígono sección **3** y **6**.
3. Al contener la arista **DH** en un plano frontal observamos que no determina directamente el punto sección, por tanto, prolongamos dicha arista hasta que corte a la recta frontal en el punto **X** (**x'**).
4. Unimos mediante una recta las proyecciones verticales **x'** y **6'** determinando en la arista **EH** el punto **5** del polígono sección.
5. Repetimos la operación anterior con las proyecciones verticales **x'** y **3'** determinando en la arista **GH** el punto **4** del polígono sección.
6. Uniendo mediante rectas todos los puntos obtenidos quedan determinadas las proyecciones diédricas del polígono sección (**1,2,3,4,5,6**).

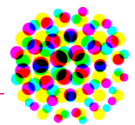
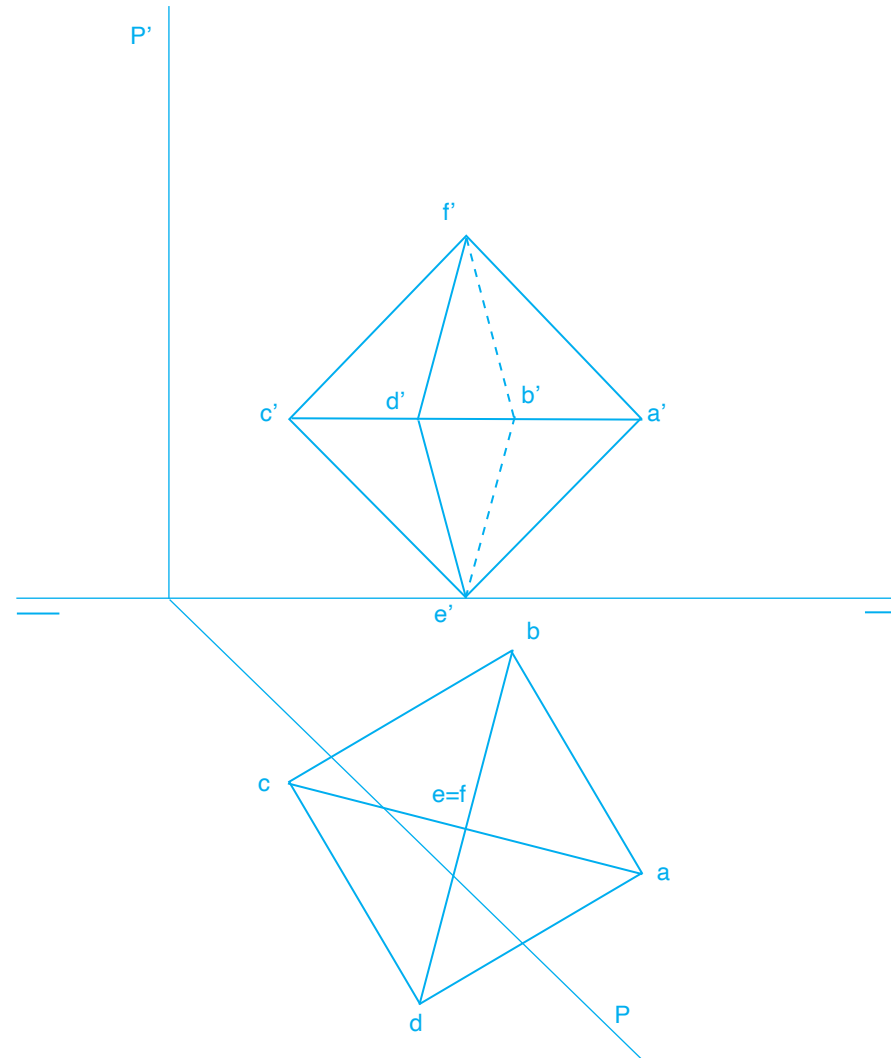


2.1.4 Octaedro con un plano proyectante

La proyección horizontal de la sección se determina directamente mediante la intersección de las aristas del poliedro con la traza horizontal del plano secante.

Dado el octaedro ABCDEF y el plano proyectante horizontal P

1. La traza horizontal del plano **P** determina los puntos de intersección con el octaedro (rectas verticales). Aristas horizontales **BC** y **AD**, puntos **1** y **4**.
2. Determinamos la intersección con las aristas oblicuas inferiores, **CE** y **DE**, puntos **2** y **3**.
3. Determinamos la intersección con las aristas oblicuas superiores, **CF** y **DF**, puntos **5** y **6**.
4. Unimos los puntos para determinar el polígono de la sección.
5. El vértice **1** se encuentra en la arista **CB**, que es oculta por lo que los lados **21** y **61** de la sección serán ocultos.



2.1.5 Octaedro con un plano oblicuo

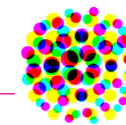
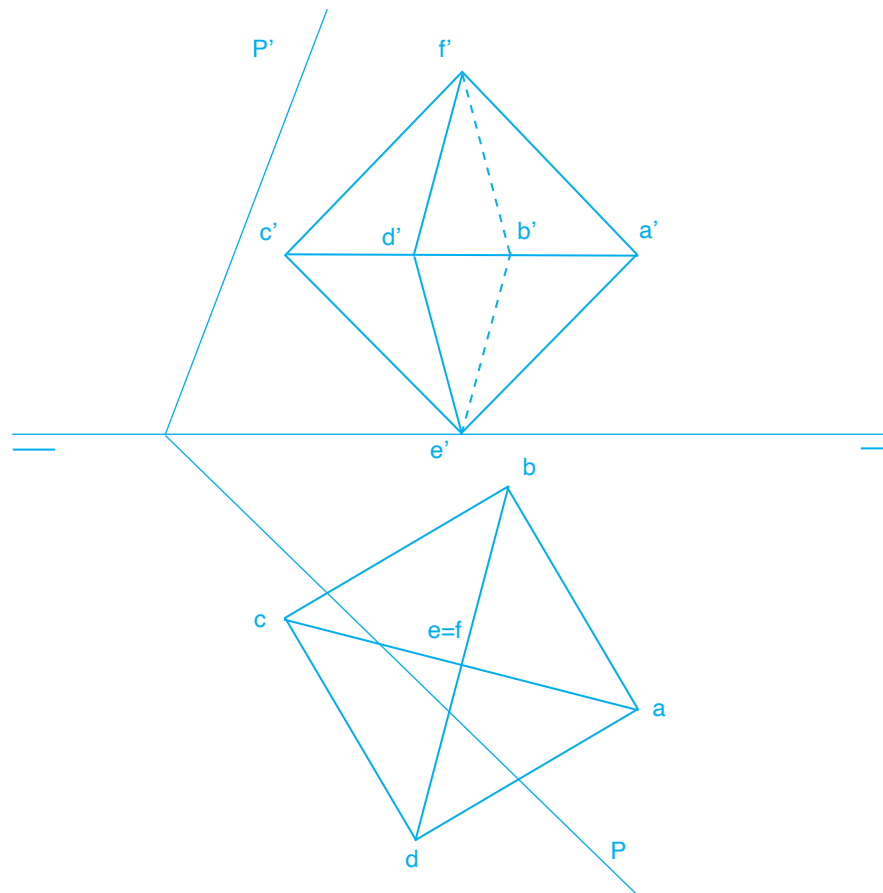
Dado el octaedro $ABCDEF$ y el plano P .

Aplicando el método general

1. Contenemos las aristas laterales horizontales BC y AD en un plano horizontal Q y determinamos su intersección con el plano P , puntos **1** y **4**.
2. Para determinar la intersección de las aristas laterales oblicuas las contenemos en planos proyectantes, en este caso horizontales: las aristas CE y AE determinan con el centro del octaedro los puntos **2** y **5**.
3. Repetimos la operación anterior con las aristas DE y BF determinando los puntos **3** y **6**.
4. Uniendo los vértices determinados anteriormente obtenemos la sección plana del octaedro con el plano dado P .
5. En la proyección vertical los lados de la sección que pasen por los vértices **1** y **6** están ocultos.
6. En la proyección horizontal los lados de la sección que pasen por los vértices **2** y **3** están ocultos.

Aplicando un cambio de plano

1. Mediante un cambio de plano vertical convertimos el plano dado P en uno de canto.
2. Obtenemos la proyección vertical del octaedro respecto de la nueva LT.
3. La proyección vertical de la sección plana queda determinada directamente.
4. A partir de la proyección vertical de la sección podemos determinar los vértices de la horizontal



2.2 SECCIONES PLANAS DE SUPERFICIES RADIADAS

El estudio y desarrollo de los conceptos y procedimientos necesarios para obtener la sección de un plano sobre una superficie radiada ya los hemos analizado en los apartados anteriores. Dada la similitud entre tetraedro y pirámide, y hexaedro y prisma, podemos emplear los métodos empleados en dichos poliedros.

En este apartado nos vamos a centrar en el estudio de las secciones producidas por un plano en un cono y en un cilindro, rectos de revolución.

2.2.1 Cono recto de revolución con un plano proyectante vertical

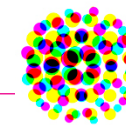
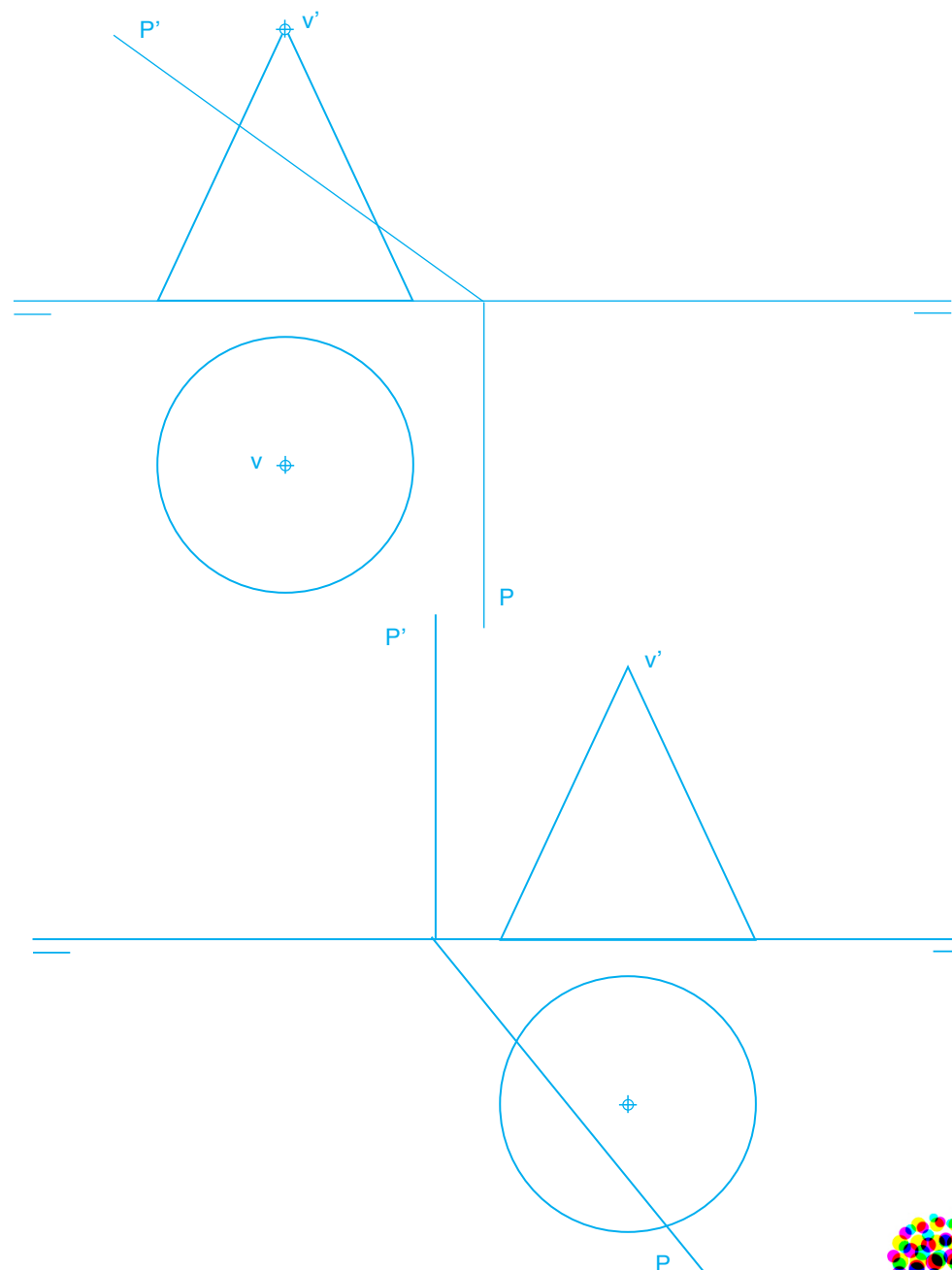
Como vimos en el apartado anterior, cuando un plano proyectante secciona a una superficie la sección queda determinada directamente en la traza del plano secante.

En este caso como el plano secante es proyectante vertical, la sección se determina directamente sobre la traza vertical de dicho plano.

1. Determinamos la intersección de las generatrices contorno, puntos **1** y **2**, el eje mayor vendrá dado en verdadera magnitud (proyección vertical).
2. Tomamos otras generatrices y determinamos otros puntos de la sección.
3. Aplicando homología podemos determinar más puntos de la proyección horizontal de la sección.
4. Unimos a mano alzada obteniendo la proyección horizontal de la sección.
5. Abatimos el plano **P** sobre el PHP para obtener la verdadera magnitud de la elipse sección.

2.2.2 Cono recto de revolución con un plano proyectante horizontal

1. La intersección de la traza **P** y la base del cono determina directamente los puntos **1** y **2** de la sección.
2. Dibujamos una generatriz cualquiera y determinamos su intersección con el plano **P**.
3. Repetimos la operación anterior para obtener otros puntos de la sección.
4. Unimos a mano alzada obteniendo la proyección vertical de la sección.
5. Abatimos el plano **P** sobre el PVP para obtener la verdadera magnitud de la sección, como el plano **P** es proyectante horizontal, la sección es una hipérbola.



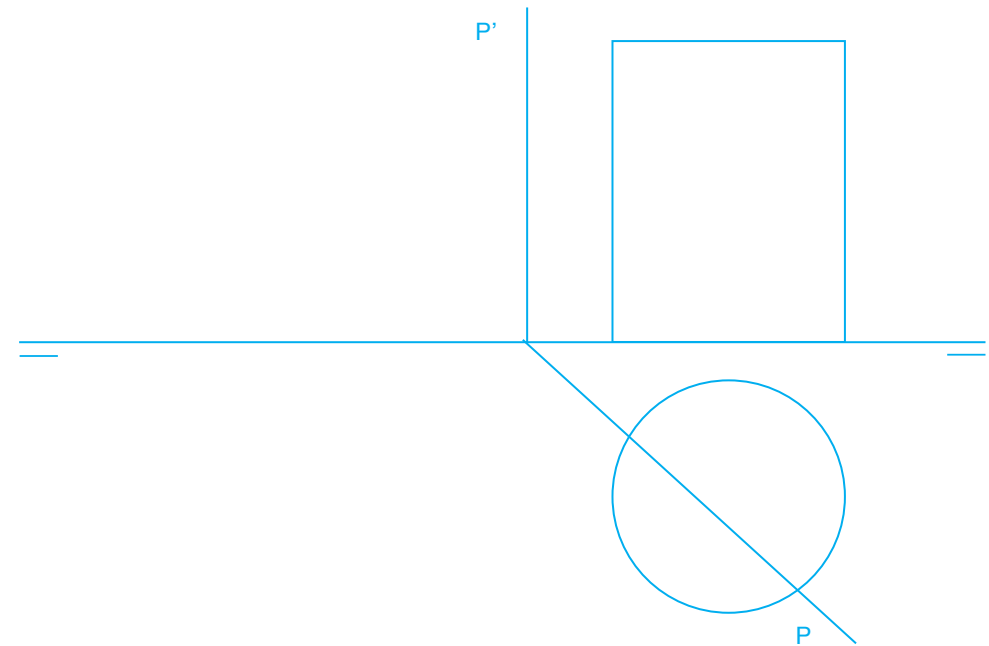
2.2.3 Cilindro recto de revolución con un plano proyectante vertical

Si consideramos al cilindro como un prisma de infinito número de caras laterales, si sustituimos las aristas del poliedro por generatrices, la intersección de cada de las generatriz con el plano secante determina la sección plana, que generalmente será una elipse.

Dados el plano P y las proyecciones de un cilindro recto de revolución apoyado en el PHP.

En este caso particular como el plano secante es perpendicular a la base del cilindro la sección producida es un rectángulo, siendo los lados menores las cuerdas de las bases determinadas por la traza horizontal del plano secante, y los lados mayores las generatrices intersección.

1. La intersección de la traza P y la base del cilindro determina directamente los puntos **1** y **2** de la sección.
2. Las generatrices que pasen por los puntos determinados anteriormente determinan los puntos **3** y **4** de la sección.
3. Unimos los puntos y obtenemos la proyección vertical de la sección.
4. Abatimos el plano P sobre el PVP para obtener la verdadera magnitud de la sección.

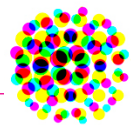
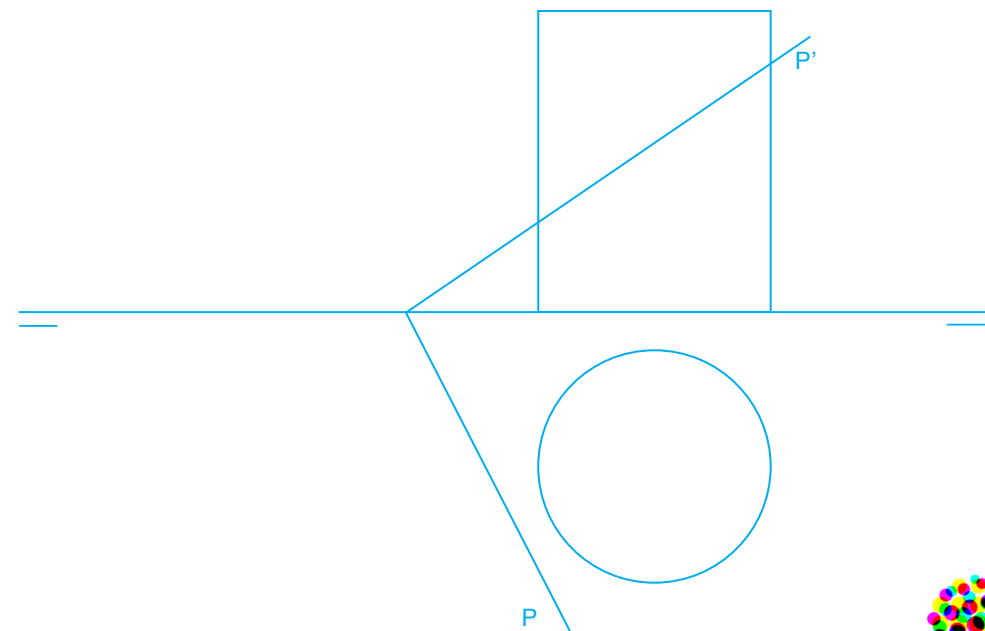


2.2.4 Cilindro recto de revolución con un plano oblicuo

Cuando el plano secante es oblicuo podemos aplicar el primer método explicado en el primer apartado.

Dados el plano P y la proyecciones de un cilindro recto de revolución apoyado en el PHP.

1. Contenemos las aristas contorno en un plano frontal, determinando su intersección con el plano P , puntos **1** y **5** de la sección
2. Repetimos la operación anterior con otras generatrices para obtener más puntos de la sección, hasta 8 sería suficiente.
3. Unimos los puntos y obtenemos la proyección vertical de la sección.
4. Podemos abatir para obtener la verdadera magnitud de la sección.



2.3 SECCIONES PLANAS DE LA ESFERA

2.3.1 Esfera con un plano proyectante horizontal.

Siempre que se corta una esfera por un plano, el resultado de la sección en magnitud real es una circunferencia.

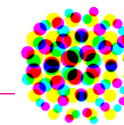
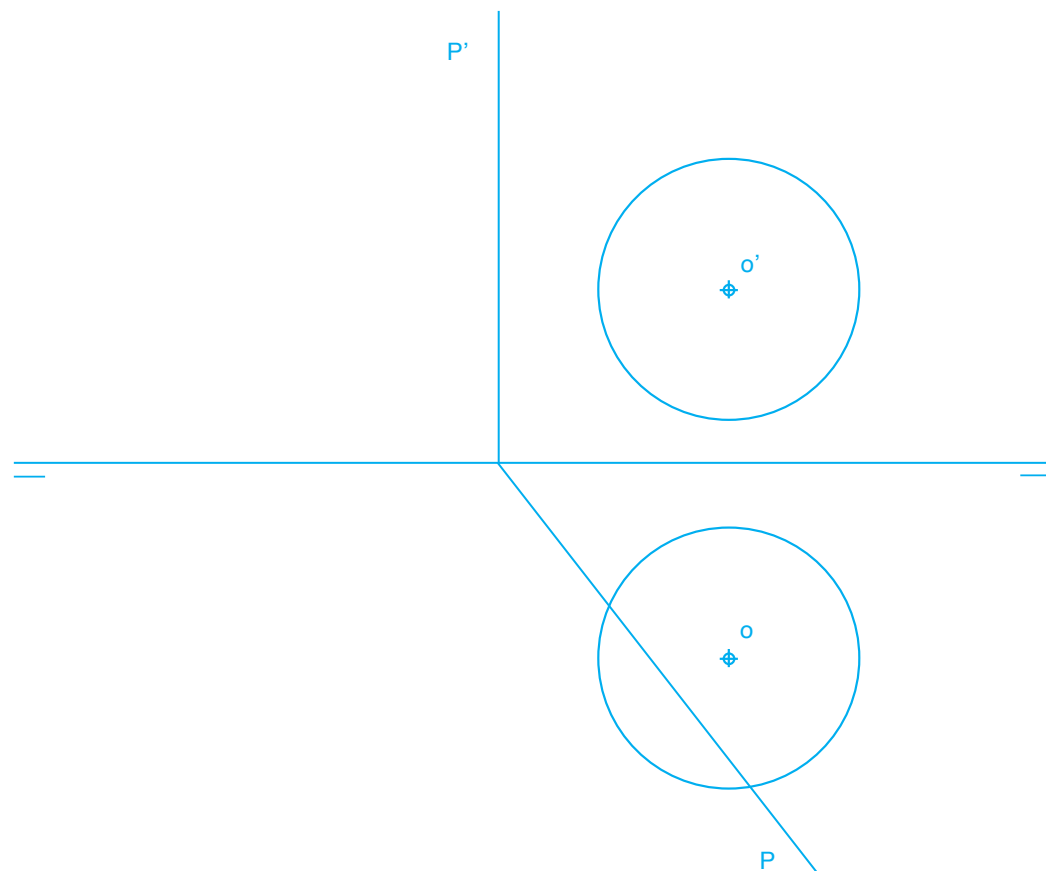
Si seccionamos la esfera por medio de un **plano proyectante horizontal**, la proyección horizontal es el segmento **ac** dimensión del diámetro de la sección en forma real.

La proyección vertical es una elipse cuyo eje mayor **b'd'** es igual a **ac** y su centro **p'** se halla en el centro de dicho segmento. El eje menor **a'c'** es la proyección vertical del diámetro **AC** de la circunferencia.

Los puntos de tangencia de la elipse son M y N que en la proyección horizontal están en la intersección del diámetro de la circunferencia con el eje **ac**, en proyección vertical estarán sus correspondientes proyecciones **m'** y **n'** sobre la circunferencia.

En esta proyección el arco de la elipse con inicio en **m'** y final en **n'** es oculto, pues todos los puntos de la semiesfera situada detrás del meridiano que pasa por **E** y **F** lo son.

La forma real de la sección, como se ha dicho, es una circunferencia de diámetro el segmento **ac**.



3. INTERSECCIÓN DE RECTAS CON SÓLIDOS

La intersección de una recta con una superficie se resuelve aplicando los conceptos y procedimientos que ya hemos estudiado en la intersección entre plano y recta.

Existen dos métodos para determinar la intersección entre una recta y una superficie: conteniendo la recta en un plano proyectante o en un plano oblicuo; dependiendo de sus características aplicaremos un método u otro.

Recta con un tetraedro. Plano oblicuo

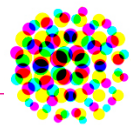
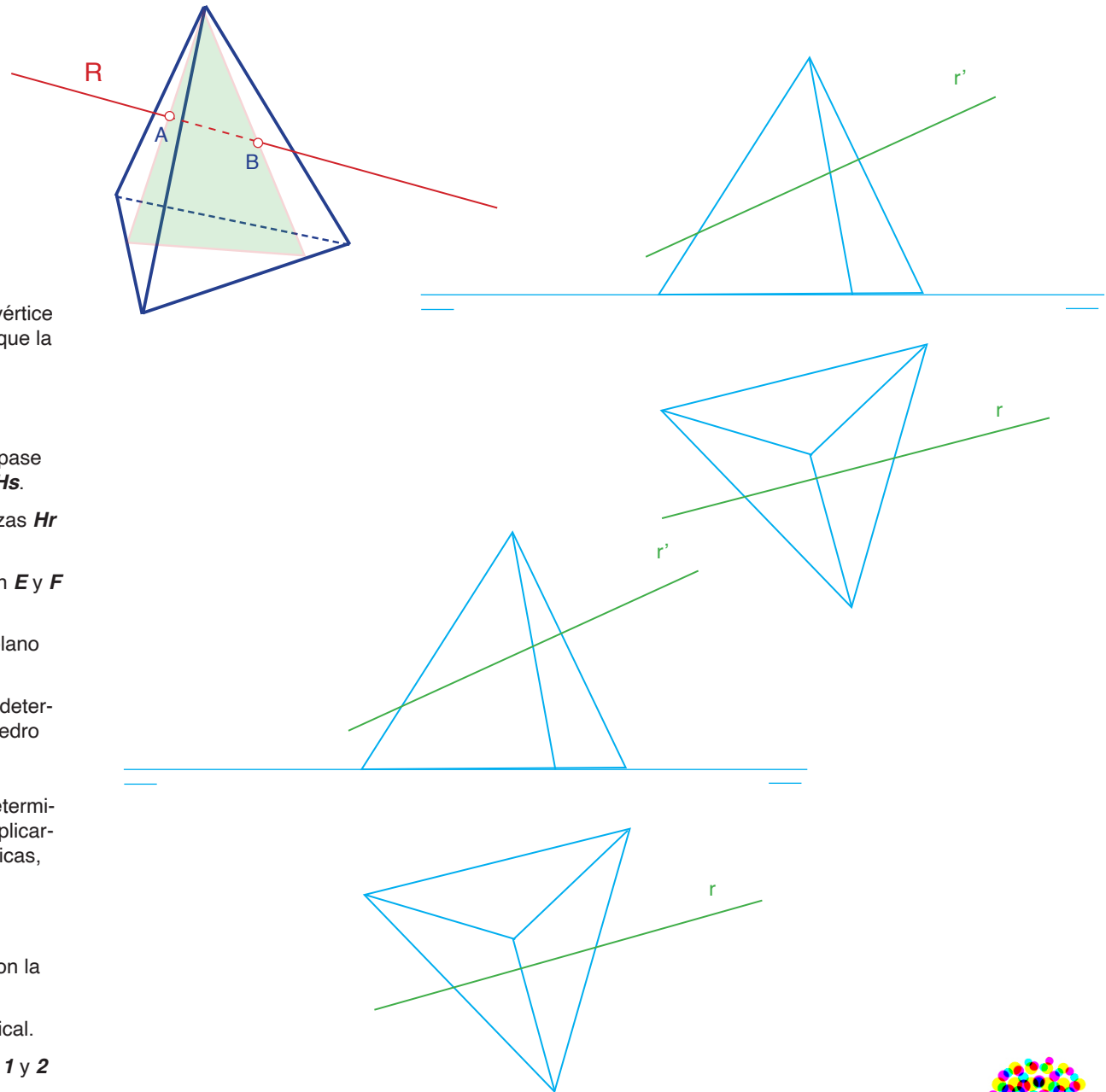
La recta está contenida en un plano oblicuo que debe pasar por un vértice de la superficie. Es el más adecuado para aplicarlo en los conos ya que la intersección de dicho plano genera un triángulo.

1. Determinamos la traza horizontal **Hr** de la recta dada.
2. Dibujamos una recta **S** que cortando a la anterior en un punto **I** pase por el vértice **V** del tetraedro, determinando su traza horizontal **Hs**.
3. Dibujamos la traza del plano **P** definido por las rectas **R** y **S**, trazas **Hr** y **Hs**.
4. La traza horizontal del plano **P** determina los puntos intersección **E** y **F** con la base del tetraedro.
5. Como el plano **P** pasa por el vértice **V** la intersección de dicho plano determina los segmentos **EV** y **FV**.
6. La intersección de los segmentos **EV** y **FV** con la recta dada **R**, determina los puntos de intersección **1** y **2** de dicha recta con el tetraedro

Recta con un tetraedro. Plano Proyectante Horizontal

Contenemos la recta en un plano proyectante lo que nos permite determinar de manera directa los puntos de intersección. No se aconseja aplicarlo en los conos ya que la intersección de dicho plano genera curvas cónicas, lo que complica la resolución.

1. Contenemos la recta **R** en un plano proyectante horizontal **P**.
2. La traza horizontal del plano **P** determina los puntos **E**, **G** y **F** con la base y la arista del tetraedro.
3. Determinamos el punto de intersección **G** en la proyección vertical.
4. Los segmentos **EV** y **FV** determinan los puntos de intersección **1** y **2** con la recta y el tetraedro dados.



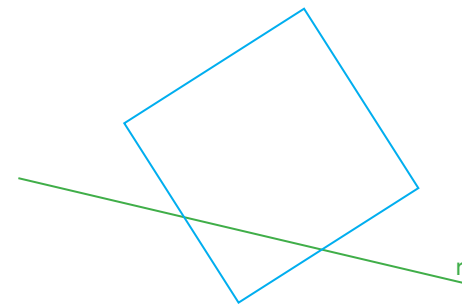
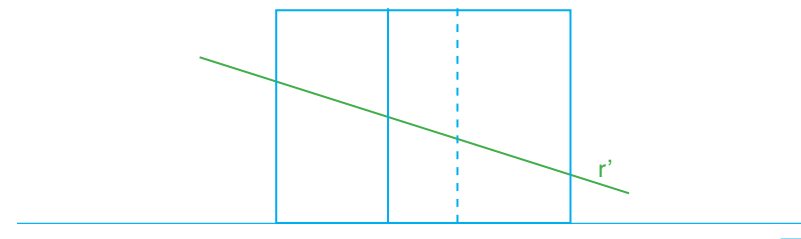
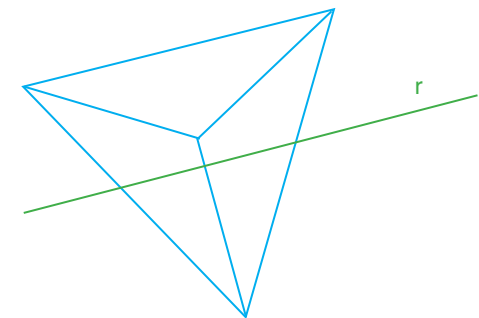
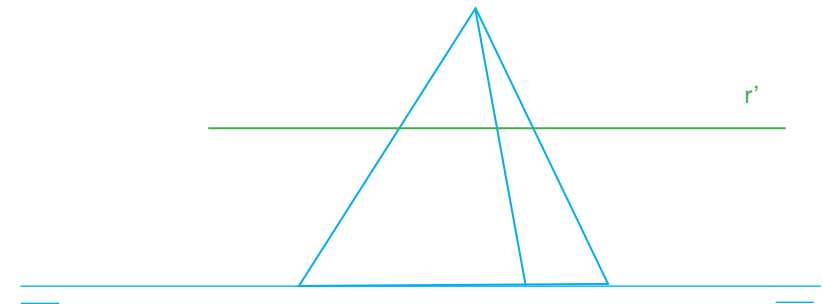
3.1 INTERSECCIÓN DE RECTAS CON POLIEDROS

3.1.1 Tetraedro, intersección con una recta horizontal.

Cuando una recta horizontal, o frontal, corta a un tetraedro determina de manera directa los puntos de intersección, ya que dicha recta estará contenida en un plano paralelo a uno de los de proyección.

En este caso particular determinaremos la intersección entre una recta horizontal y un tetraedro conteniendo dicha recta en un plano horizontal auxiliar.

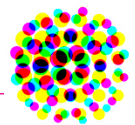
1. Contenemos la recta **R** en un plano horizontal **P**.
2. La traza vertical del plano, **P'**, determina los puntos **E**, **F** y **G** con las aristas laterales del tetraedro.
3. Como el plano **P** es horizontal determina el triángulo **EFG** paralelo a la base.
4. La intersección del triángulo **EFG** con la recta dada determina los puntos de intersección **1** y **2** de dicha recta con el tetraedro.



3.1.2 Hexaedro, intersección con una recta oblicua.

Como la recta oblicua corta a un hexaedro aplicaremos el segundo método estudiado en el primer apartado, así pues, contendremos la recta dada en un plano proyectante horizontal, determinando de manera directa los puntos intersección.

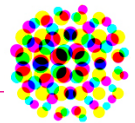
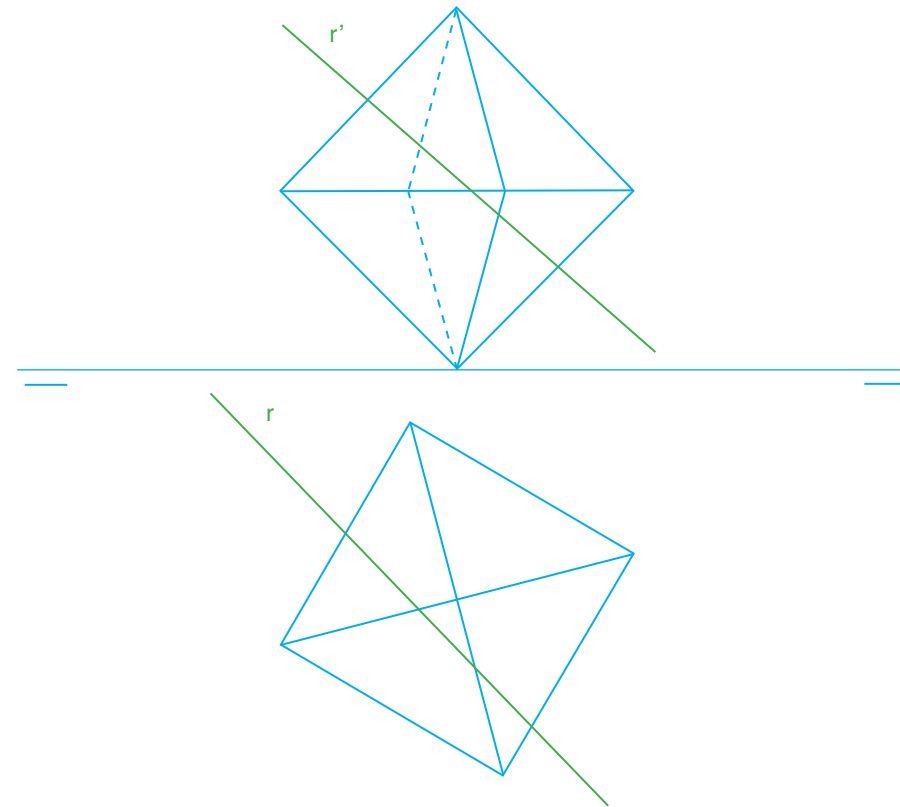
1. Contenemos la recta **R** en un plano proyectante horizontal **P**.
2. La traza horizontal del plano **P** corta a la base del hexaedro, determinando los puntos **I** y **J**.
3. Y a la cara superior, paralela a la base del hexaedro, determinando los puntos **K** y **L**.
4. Los puntos **I**, **J**, **K** y **L** determinan la sección del plano **P** con el hexaedro dado.
5. Dicha sección intersecciona con la recta dada **R** determinando los puntos intersección **1** y **2** con el hexaedro dado.



3.1.3 Octaedro, intersección con una recta horizontal.

En este último caso como la recta oblicua corta a un octaedro también aplicaremos el segundo método.

1. Contenemos la recta **R** en un plano proyectante horizontal **P**.
2. Dicho plano corta al octaedro, determinando los puntos **A, B, C, D, E y F**.
3. Los puntos **A, B, C, D, E y F** determinan la sección del plano **P** con el octaedro dado.
4. Dicha sección intersecciona con la recta dada **R** determinando los puntos intersección **1** y **2** con el octaedro dado.

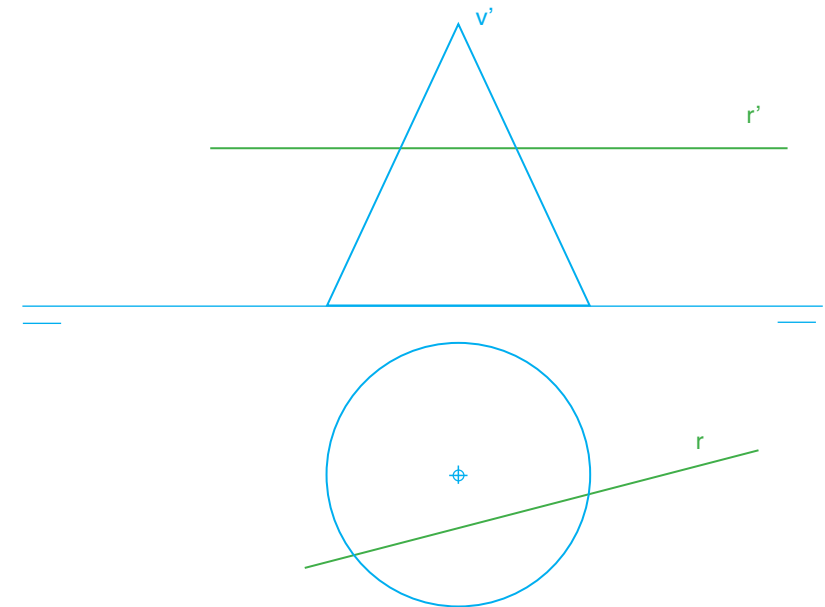


3.2 INTERSECCIÓN DE RECTAS CON SUPERFICIES RADIADAS

3.2.1 Cono, intersección con una recta horizontal.

Si una recta horizontal, o frontal, corta a un cono los puntos de intersección no se determinan de forma directa; pero podemos simplificar el trazado si contenemos dicha recta en un plano paralelo a uno de los de proyección.

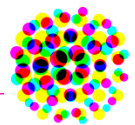
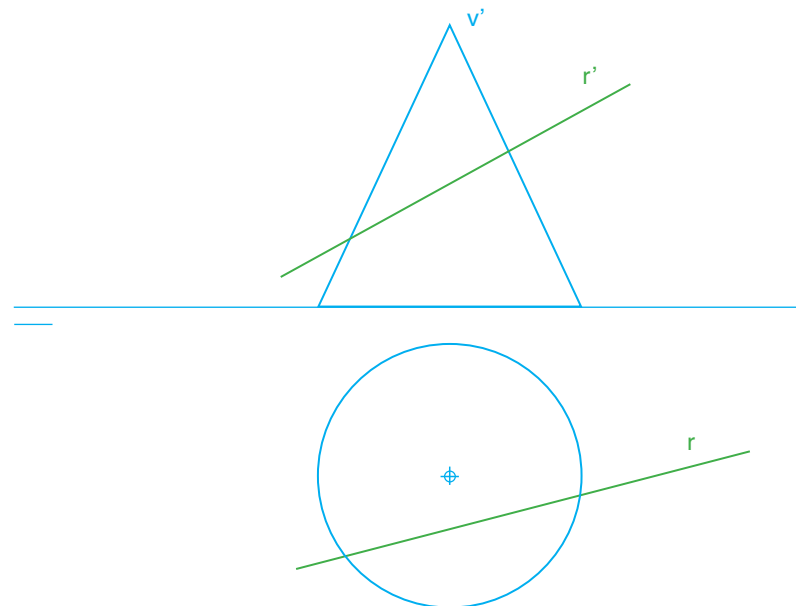
1. Contenemos la recta **R** en un plano horizontal **P**. El plano horizontal **P** que contiene a la recta **R** produce una sección circular paralela a la base.
2. La intersección de la proyección horizontal **r** de la recta con la circunferencia que delimita la sección, señala los puntos de intersección entre el cono y la recta **R**.



3.2.2 Cono, intersección con una recta oblicua.

Como la recta oblicua corta a un cono recto de revolución aplicaremos el primer método estudiado en el primer apartado, así pues, contendremos la recta dada en un plano oblicuo que pase por el vértice de dicho cono, lo que nos simplificará bastante la determinación de los puntos intersección.

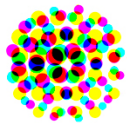
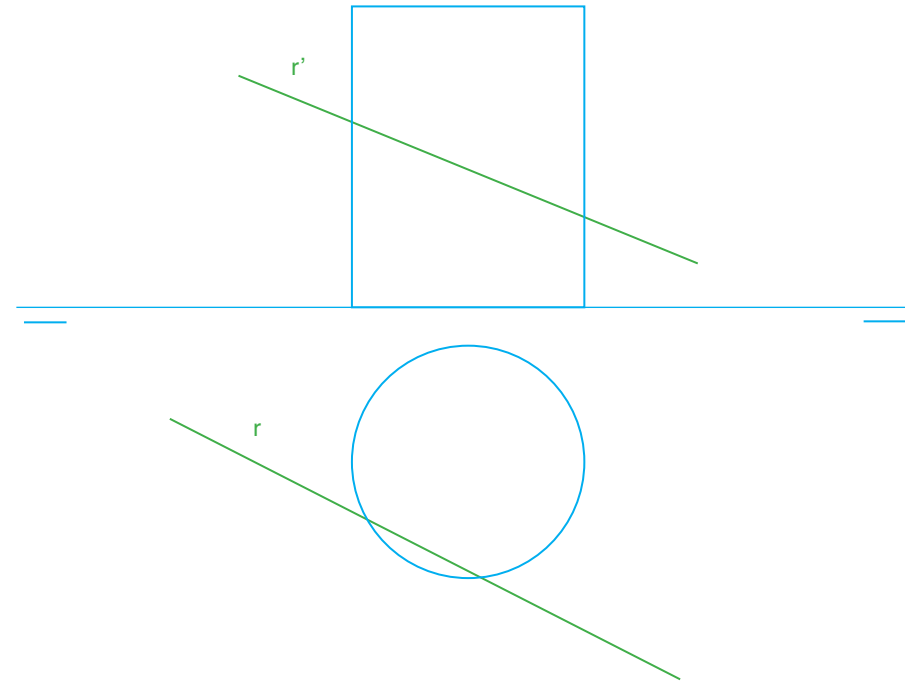
1. Determinamos la traza horizontal **Hr** de la recta **R** dada.
2. Dibujamos una recta **S** que cortando a la anterior en un punto **I** pase por el vértice **V** del cono, determinando su traza horizontal **Hs**.
3. Dibujamos la traza del plano **P** definido por las rectas **M** y **S**, trazas **Hr** y **Hs**.
4. La traza horizontal del plano **P** determina los puntos intersección **E** y **F** con la base del tetraedro.
5. Como el plano **P** pasa por el vértice **V** la intersección de dicho plano determina los segmentos **EV** y **FV**.
6. La intersección de los segmentos **EV** y **FV** con la recta dada **R**, determina los puntos de intersección **1** y **2** de dicha recta con el cono.



3.2.3 Cilindro, intersección con una recta oblicua

Como en el caso estudiado anteriormente en el hexaedro, si una recta oblicua corta a un cilindro aplicaremos el segundo método estudiado en el primer apartado, así pues, contendremos la recta dada en un plano proyectante horizontal, determinando de manera directa los puntos intersección.

1. Contendremos la recta **R** en un plano proyectante horizontal **P**, cuya traza horizontal coincide con la traza horizontal **r** de la recta.
2. La traza horizontal del plano **P** corta a la base del cono, determinando los puntos **E** y **F**.
3. Y a la cara superior, paralela a la base del cilindro, determinando los puntos **G** y **H**.
4. Los puntos **E**, **F**, **G** y **H** determinan la sección del plano **P** con el cilindro dado.
5. Dicha sección intersecciona con la recta dada **R** determinando los puntos intersección **1** y **2** con el cilindro dado.



3.3 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LA ESFERA

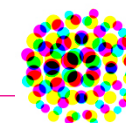
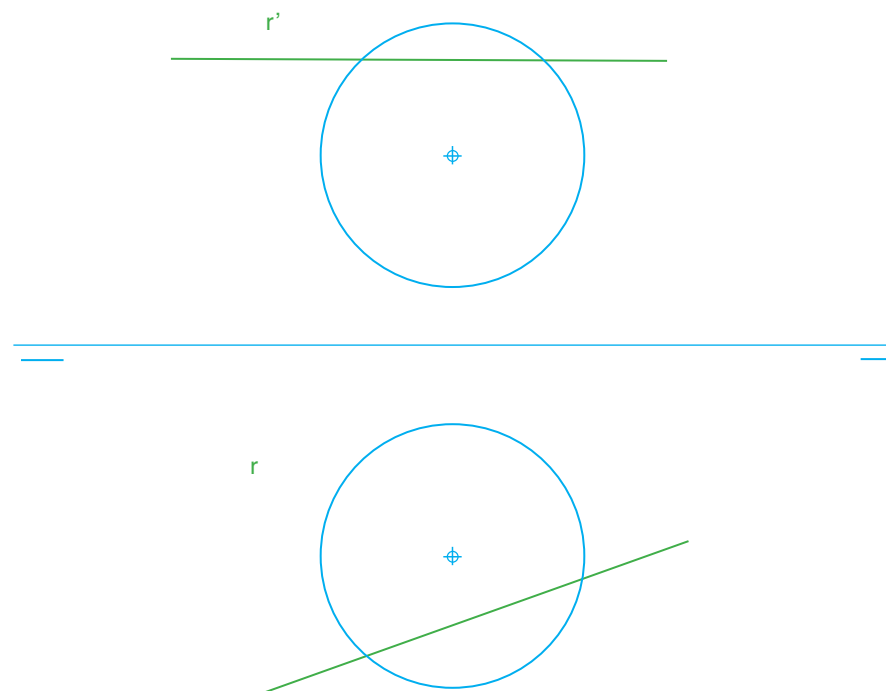
Para determinar los puntos de intersección de una recta con una superficie esférica se sigue el procedimiento realizado para los sólidos vistos anteriormente, es decir, tomando un plano auxiliar que contenga a la recta dada y determinando la sección producida. Los puntos donde el perímetro de la sección sea cortado por la recta, son los de intersección buscados.

3.3.1 Esfera, intersección con una recta paralela a un plano de proyección (horizontal o frontal)

Cuando la recta dada es una horizontal, el problema no presenta ninguna dificultad. Basta con tomar un plano auxiliar horizontal que contenga a la recta dada.

1. Contenemos la recta **R** en un plano horizontal **P'**, cuya traza vertical coincide con la traza vertical **r'** de la recta.
2. Determinamos los puntos de intersección **M** y **N** que referidos a su proyección horizontal determinan el diámetro del círculo sección en verdadera magnitud.
3. La circunferencia de diámetro **m n** y centro en **o**, corta a la proyección horizontal de recta dada **r**, en los puntos **a** y **b**, que son los de intersección buscados, cuyas proyecciones verticales se encuentran referidas en **a' b'**, sobre la proyección vertical **r'** de la recta.

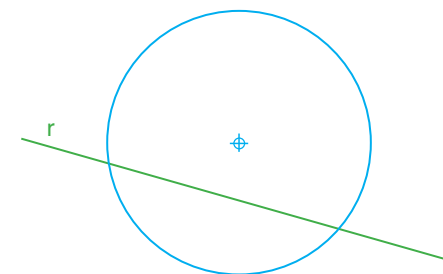
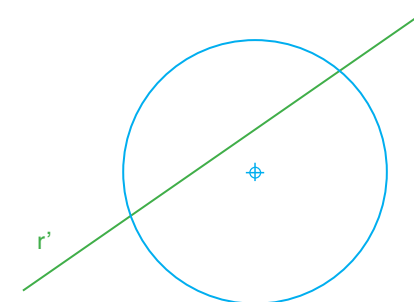
En el caso de que la recta dada fuese una frontal, se procede de idéntico modo al descrito, trazando un plano auxiliar frontal que contenga a la recta dada.



3.3.2 Esfera, intersección con una recta oblicua

Cuando la recta dada es oblicua con respecto a los dos planos de proyección se puede proceder a convertirla en frontal u horizontal utilizando un giro.

1. Tomamos un eje vertical que contiene al centro de la esfera
2. La recta girada ocupará la posición r_1 , r_1' , obtenida por el giro alrededor de o de dos de su puntos, c , c' y d , d' , que ocuparán, después del giro, las proyecciones c_1 , c_1' y d_1 , d_1' .
3. Hacemos pasar por r_1 , r_1' , un plano auxiliar P paralelo al PV, puesto que la recta ha quedado convertida en frontal al situar su proyección r_1 paralela a LT. La intersección de este plano auxiliar se muestra verticalmente en verdadera magnitud, mediante un círculo menor de diámetro $m'n'$, referido de la proyección horizontal, m , n , de la traza P .
4. La circunferencia, perímetro de la sección producida, corta a la recta girada r_1' , en proyección vertical, en los puntos a' , b' . Desahaciendo el giro, es decir, trazando las horizontales por a' , b' , determinemos definitivamente sobre la recta dada r' , los puntos de intersección a' , b' proyectados verticalmente, los cuales vienen en a y b referidos sobre la proyección horizontal r de la recta.



Este ejercicio se puede realizar también mediante cambio de plano. Colocamos la nueva línea de tierra paralela a r y realizaremos un cambio de plano vertical para colocar la recta como frontal.

