TEMA 3. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS: EQUIVALENCIA, HOMOLOGÍA Y AFINIDAD

CONTENIDO

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1.3. Relacionar las transformaciones homológicas con sus aplicaciones a la geometría plana y a los sistemas de representación, valorando la rapidez y exactitud en los trazados que proporciona su utilización.

TEMA 3. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS: EQUIVALENCIA, HOMOLOGÍA Y AFINIDAD

Una transformación geométrica es una operación o la combinación de varias de ellas, en que se parte de una forma original para generar otra nueva (transformada).

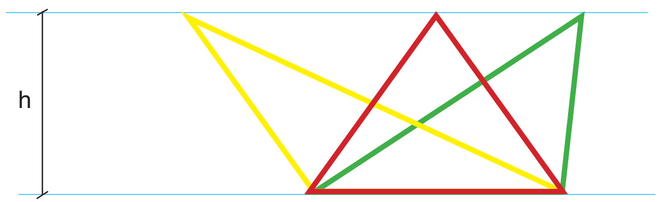
El resultado es un cambio (de posición, de tamaño, de forma, ...) producido en una figura dada F cuando pasa a ser F'. A cada punto de la figura origen (F) se le hace corresponder en el mismo plano, otro de la forma transformada (F'). Las correspondencias entre los elementos de F y de F' originan los diferentes tipos de transformaciones. La relación que exista entre los elementos origen y transformados debe de ser biunívoca.

Las transformaciones geométricas se clasifican según las características métricas de la figura transformada respecto a la original, pueden ser de tres tipos:

- **ISOMÉTRICAS:** también llamadas movimientos. Son aquellas que conservan las medidas de los segmentos y de los ángulos de la figura original y su transformada (**IGUALDAD, TRASLACIÓN, GIRO y SIMETRÍA**). Pueden ser de dos tipos:
  - Directas: cuando la transformación conserva el sentido del elemento original (igualdad, traslación, giro y simetría axial).
  - Inversas: cuando el sentido de la transformada y el original es contrario (simetría axial).
- **ISOMÓRFICAS:** son aquellas que conservan las formas. Se pueden establecer relaciones de proporcionalidad entre dos figuras transformadas (**SEMEJANZA Y HOMOTECIA**).
- **ANAMÓRFICAS:** Son las transformaciones que no conservan las formas (**EQUIVALENCIA, HOMOLOGÍA y AFINIDAD**).

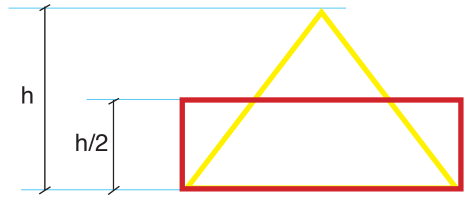
1. EQUIVALENCIA

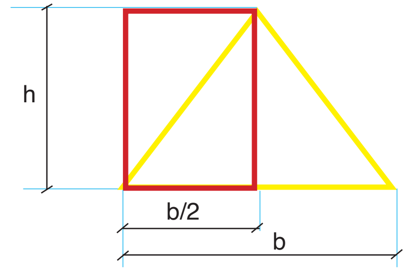
Dos figuras son equivalentes cuando tienen distinta forma pero ocupan igual superficie, ocurriendo que una de ellas puede tener un número de lados distinto a la otra , pero ambas ocuparán la misma superficie.

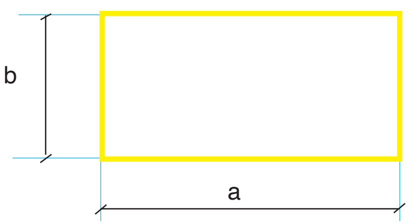


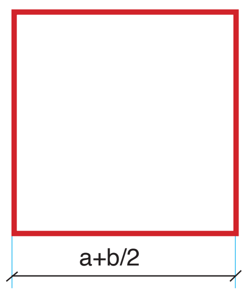
Triángulos y polígonos equivalentes:

- Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.
- Un triángulo cualquiera puede siempre transformarse en un rectángulo de igual base y mitad altura o de base mitad e igual altura.
- Un cuadrilátero rectángulo, de lados a-b, puede siempre transformarse en un cuadrado de lado L, media geométrica entre a y b.







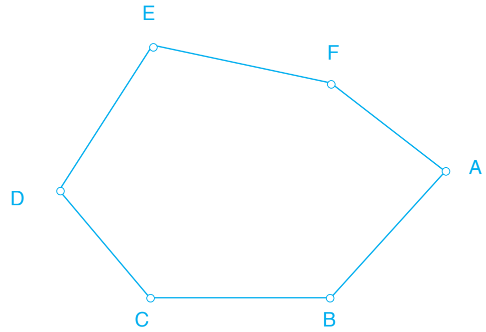


1.1. POLÍGONO EQUIVALENTE A OTRO CON UN LADO MENOS

Dado el polígono ***ABCDEF***

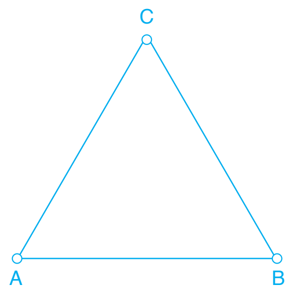
1. Se traza una diagonal cualquiera que aísle un solo vértice, por ej. ***FB***.
2. Se prolonga el lado ***BC*** hasta que corte a la paralela a la diagonal trazada desde ***A*** y obtenemos ***G***.
3. El polígono ***GCDEF*** es el equivalente al dado.

Los triángulos ***ABF*** y ***GBF*** son equivalentes por tener la misma base e igual altura.



1.2. TRIÁNGULO EQUIVALENTE A OTRO DE IGUAL BASE

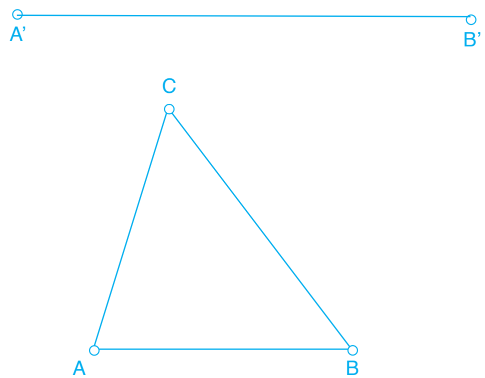
Este es el caso más sencillo de equivalencia ya que al tener los dos triángulos la misma base, la altura de ambos debe de ser la misma.
Basta con trazar por ***C*** una paralela a la base y ***C'*** podrá ocupar cualquier posición en esa paralela.



1.3. TRIÁNGULO EQUIVALENTE A OTRO DADO DE DISTINTA BASE.

Dado el triángulo ***ABC*** y el segmento ***A'B'***, base del nuevo triángulo:

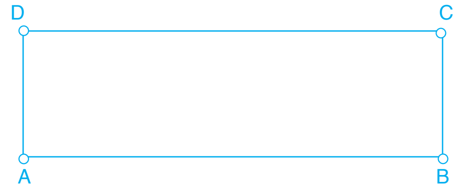
1. Determinamos la altura del triángulo, desde el vértice ***A*** se traza una perpendicular hasta que corte a la paralela a ***AB*** por ***C.***
2. A partir del vértice ***A*** trasladamos la medida de la base dada ***A'B'.***
3. Unimos el vértice ***B'*** con el extremo ***P*** de la altura.
4. Por el vértice ***B*** dibujamos una recta paralela al segmento anterior (***B'P***) hasta que corte al segmento ***AP*** (altura h1) determinando el punto ***Q***.
5. El segmento ***A'Q*** se corresponde con la altura del triángulo ***A'B'C'*** equivalente al dado.
6. El vértice ***C'*** puede ocupar cualquier posición situada en la paralela a la base desde ***Q***.



1.4. TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN PARALELOGRAMO RECTÁNGULO.

Se trata de dibujar un triángulo equivalente a un paralelogramo rectángulo cuya base sea igual al lado mayor de dicho cuadrilátero.

- Triángulo = (base * altura) / 2 = Paralelogramo rectángulo = lado mayor * lado menor.
- Por tanto, la altura del triángulo debe de ser igual al doble del lado menor del paralelogramo rectángulo.

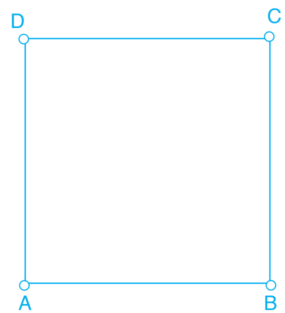


1.5. TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN CUADRADO.

En este ejercicio se quiere trazar un triángulo equivalente a un cuadrado dado, de altura mayor al lado de dicho cuadrilátero. Para dibujarlo podemos aplicar el método general estudiado en el apartado anterior y después transformar el triángulo obtenido en otro de distinta base y altura.
Si queremos simplificar el trazado podemos recurrir a un método particular que nos permite dibujar dicho triángulo equivalente de forma directa:

Sea el cuadrado ***ABCD***:

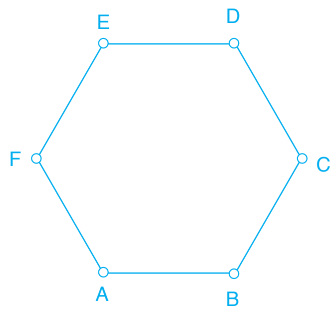
1. Con centro en ***E***, punto medio del lado ***AB***, se traza la semicircunferencia que pasa por los vértices ***C*** y ***D*** del cuadrado, y que corta a las prolongaciones del lado ***AB*** en los puntos ***F*** y ***G***.
2. Con centro en ***B*** y radio ***BG***, se traza un arco de circunferencia que corta al lado ***BC*** en el punto ***H***; con centro en ***H*** e igual radio, se traza otro arco que corta a la prolongación del lado ***BC*** en el punto ***I***.
3. Por el punto ***I*** se traza la recta ***r*** paralela al lado ***AB***. Cualquier punto ***J*** de la recta ***r***, unido con los puntos ***B*** y ***F*** determina el triángulo que se busca.

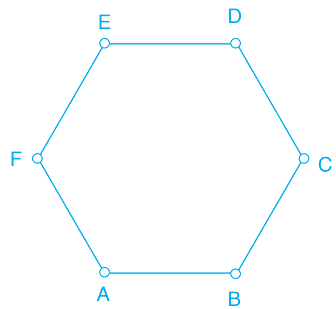


1.6. TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN HEXÁGONO REGULAR.

Este ejercicio se puede realizar mediante el método general, transformando sucesivamente el polígono en otros de un lado menos o podemos utilizar el siguiente método particular, simplificando el trazado:
Sea el hexágono ***ABCDEF***

1. Por el vértice ***F*** se traza la perpendicular al lado ***AB*** hasta cortar a su prolongación en el punto ***G***.
2. Con centro en ***B*** y radio ***BG*** se traza la semicircunferencia que corta a la prolongación del lado ***AB*** en el punto ***H***. Los puntos ***G*** y ***H***, unidos con cualquier punto ***I*** del lado ***ED*** determinan un triángulo equivalente al hexágono.

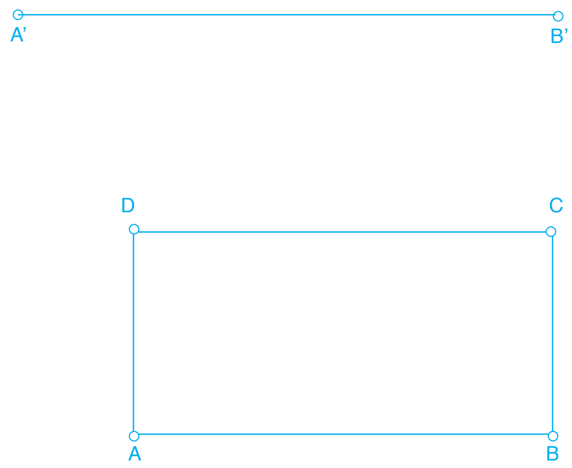




1.7. RECTÁNGULO EQUIVALENTE A OTRO DADO.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar los conceptos y procedimientos desarrollados en la resolución del "triángulo equivalente a otro dado de distinta base" visto anteriormente, ya que el paralelogramo rectángulo dado está compuesto por dos triángulos rectángulos.

Dado un paralelogramo rectángulo *ABCD*, dibujar otro equivalente de lado *A'B'*:

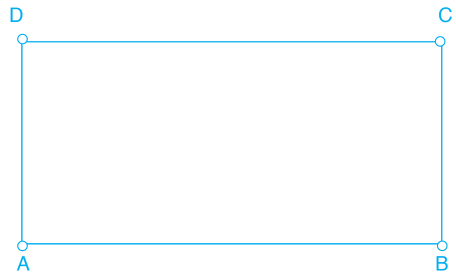


1. A partir de ***A*** y sobre el lado ***AB*** llevamos el segmento ***A'B'*** dado.
2. Unimos ***B'*** con ***D***.
3. Por el vértice ***B*** dibujamos una recta paralela al segmento anterior, ***B'D***, hasta que corta al lado ***AD*** en el punto ***D'***.
4. El segmento ***A'D'*** es el lado del paralelogramo rectángulo y por tanto su altura.
5. A partir de ***D'*** dibujamos una paralela a la base y por el vértice ***B'*** levantamos una perpendicular hasta que se corten, determinando el vértice ***C'***
6. Uniendo los vértices ***A'B'C'D'*** nos determina el paralelogramo equivalente buscado.

1.8. DADO UN RECTÁNGULO, DIBUJAR EL CUADRADO EQUIVALENTE

Sea el rectángulo ***ABCD***:

1. Con centro en ***B*** y radio ***BC***, se traza un arco hasta cortar a la prolongación del lado ***AB*** en el punto ***E***.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro ***AE***, que se corta con la prolongación del lado ***BC*** en el punto ***G***. El segmento ***BG*** es el lado del cuadrado equivalente.

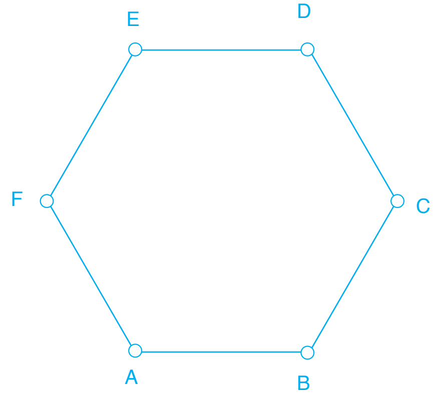


1.9. CUADRADO EQUIVALENTE A UN POLÍGONO REGULAR.

Este método particular nos permite dibujar, de manera directa, un cuadrado equivalente a cualquier polígono regular, por lo que no es necesario convertir previamente dicho polígono en un paralelogramo rectángulo.
Como la superficie de cualquier polígono regular se calcula multiplicando su apotema por el semiperímetro, la media proporcional de ambos segmentos será el lado del cuadrado equivalente.

Dado el polígono ***ABCDE***:

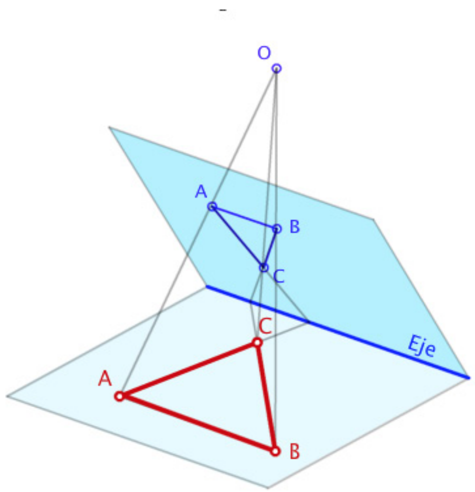
1. Dibujamos un segmento ***AD*** igual al semiperímetro del polígono.
2. Para hallar la media proporcional añadimos al segmento ***AD*** la magnitud del ***apotema***.
3. Del segmento resultante ***AM*** hallamos su centro y trazamos una semicircunferencia que pase por los extremos.
4. Sobre ***D*** trazamos una perpendicular a ***AM*** y cortamos en el punto ***C'*** con la semicircunferencia. Este segmento será la altura del cuadrado equivalente.
5. Con paralela a ***AM*** en ***C'*** usamos el compás, y con centro en ***C'*** hallamos ***D'***, la perpendicular por este punto a ***AM*** nos dará ***A'***. Ya tenemos formado el cuadrado equivalente al hexágono.

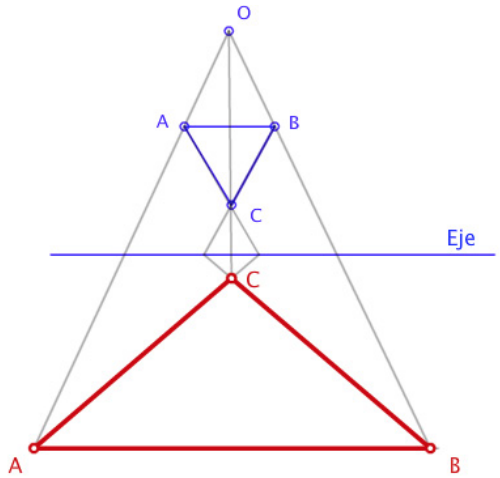


2. HOMOLOGÍA

La homología plana es una transformación homográfica generada por la proyección de un punto, siendo las dos figura homólogas secciones de dicha radiación.
Dos figuras homólogas se correspondan punto a punto y recta a recta respetando las siguientes leyes:

- Dos puntos homólogos (A y A') están alineados con un punto fijo (O) **llamado centro de homología**.
- Dos rectas homólogas se cortan en una recta llamada **eje de homología**. El eje, por tanto es el lugar geométrico de los puntos que son homólogos de sí mismos (puntos dobles) .
- Cuando una recta es paralela al eje de homología, su homóloga también lo es.

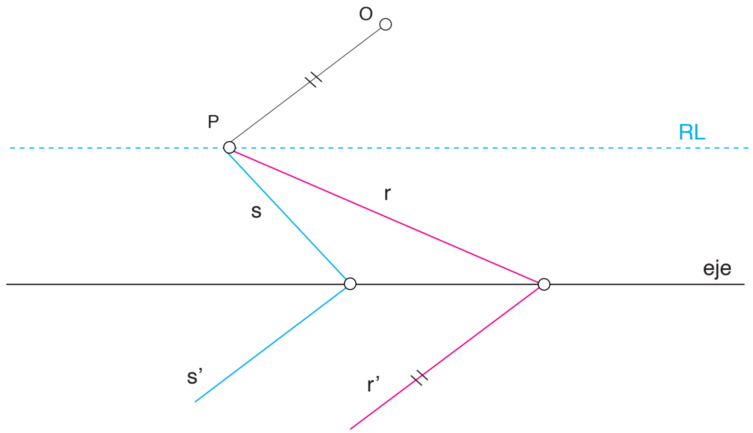


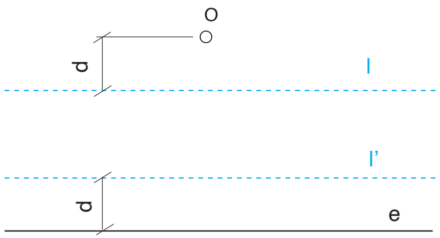


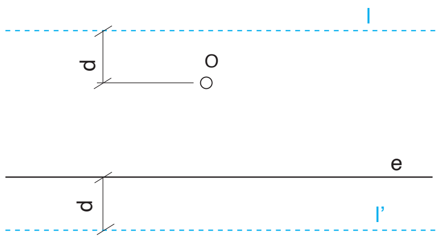
2.1. RECTAS LÍMITE

- Es el lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos están en el infinito. Las rectas límite son dos: RL y RL', y son paralelas al eje.

Propiedades
- Todas las rectas que se cortan en un mismo punto P de la recta límite tienen sus homólogas paralelas a la dirección OP.
- La distancia de una de las rectas límite al centro de homología es la misma que hay desde la otra recta límite al eje de homología.
- Las rectas límite están siempre entre el centro O y el eje, o bien fuera de ellos.



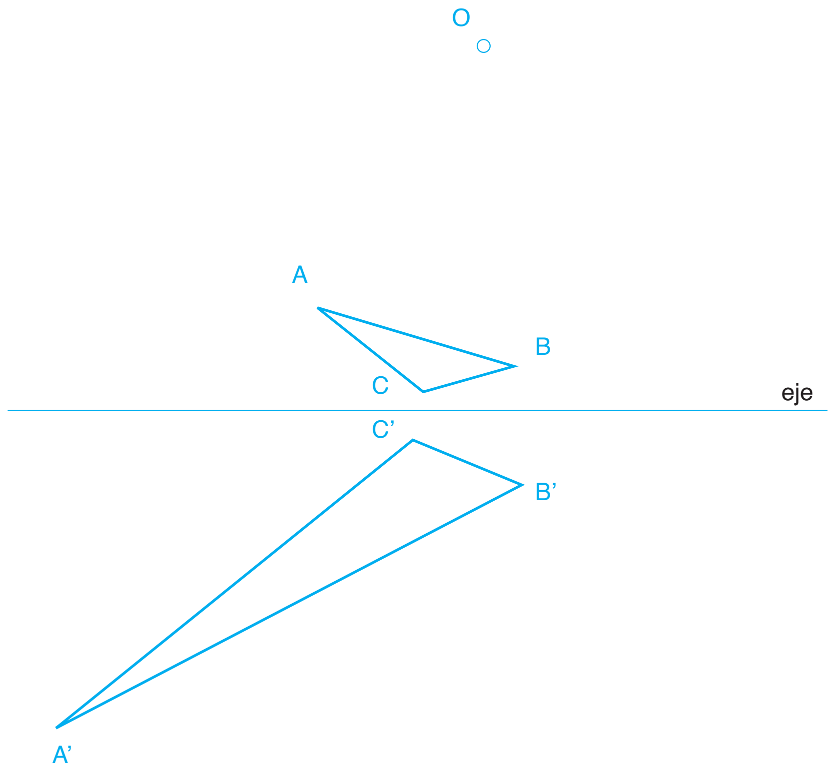




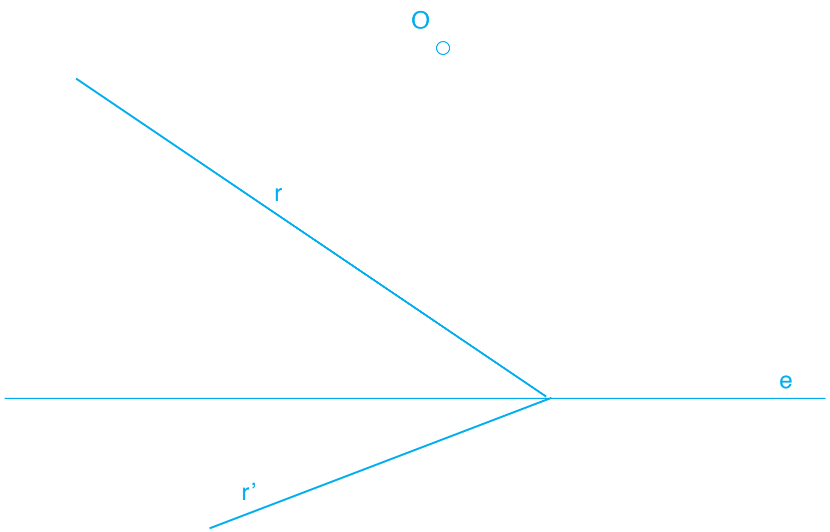
2.1.1. Determinación de las rectas límites en una homología

Dada una homología determinada por dos triángulos homólogos ABC y A'B'C', el centro y el eje de homología:

1. Prolongamos dos de los lados del triángulo origen hasta que corte al eje en los puntos dobles ***PP'*** y ***QQ'***.
2. Por el centro de homología dibujamos rectas paralelas a los lados prolongados hasta que corten a dichas prolongaciones. Determinado los puntos de la recta límite ***M*** y ***N***.
3. Trazamos la recta límite (***RL***) uniendo los puntos ***M*** y ***N***.
4. Para determinar la otra recta límite (***RL'***) repetimos los pasos anteriores respecto al lado ***B'C'***: la intersección de la prolongación del lado ***B'C'*** con la recta paralela al lado homólogo ***BC***, trazada desde el centro de homología, determina el punto ***S***, que pertenece a dicha recta límite y que también es paralela al eje.



Dadas dos rectas homólogas r y r', el centro O y el eje e, hallar las rectas límite



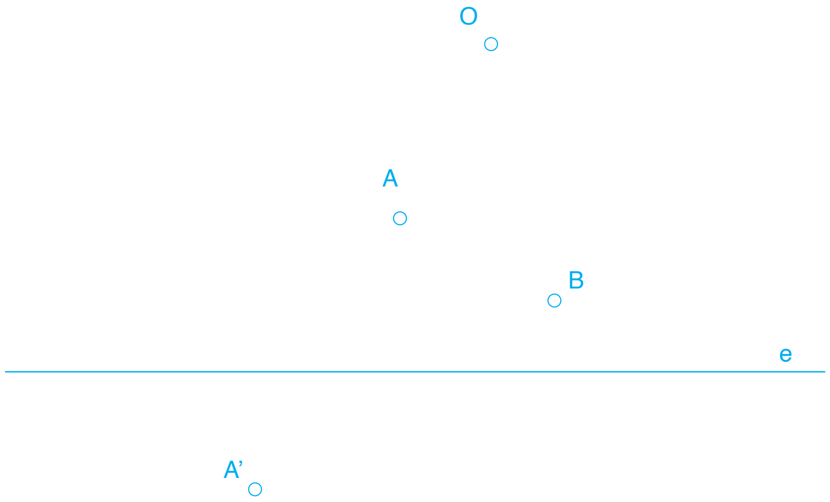
1. Por el centro de homología ***O*** se traza la paralela a la recta ***r'*** hasta cortar a la otra recta ***r*** en el punto ***M*** (homólogo del punto ***M'*** del infinito de ***r'***).
2. Por ***M*** se traza la recta límite ***RL*** paralela al eje.
3. Por el centro de homología ***O*** se traza la paralela a la recta ***r*** hasta cortar a la otra recta ***r'*** en el punto ***N'*** (homólogo del punto ***N*** del infinito de ***r***). Por ***N'*** se traza la recta límite ***RL'*** paralela al eje.

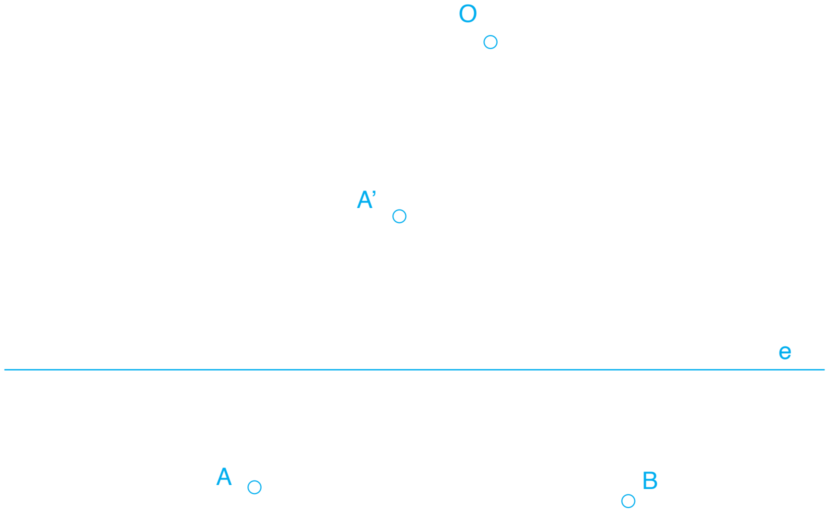
2.2. DETERMINACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA.

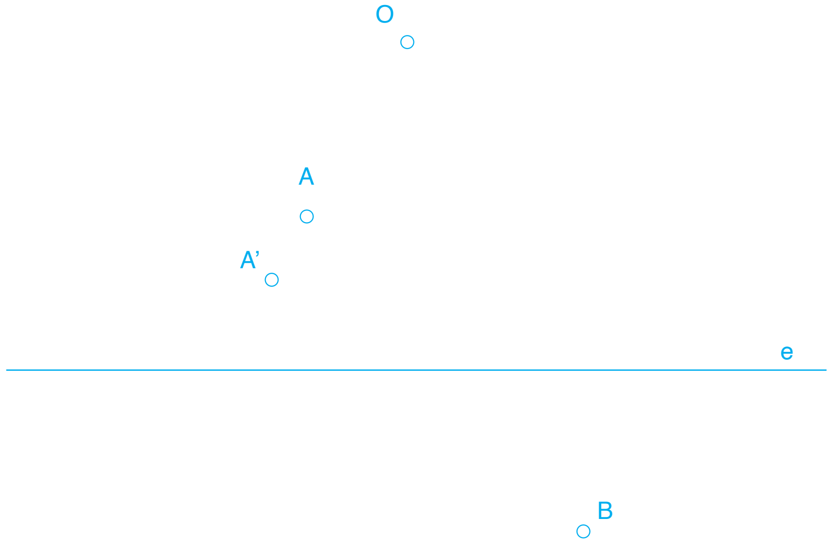
2.2.1. Dado el eje, el centro y un par de puntos homólogos.

Halla el homólogo B' del punto B, conocido el centro de homología, O y los puntos homólogos A y A'

1. Se unen los puntos ***A*** y ***B*** mediante la recta ***r***, que corta al eje en el punto ***E***-***E'***.
2. El punto ***E-E'*** se une con el punto ***A'*** mediante la recta ***r'***, homóloga de la recta ***r***.
3. Se une el centro ***O*** con el punto ***B*** hasta cortar a la recta ***r'*** en el punto ***B***' solución.

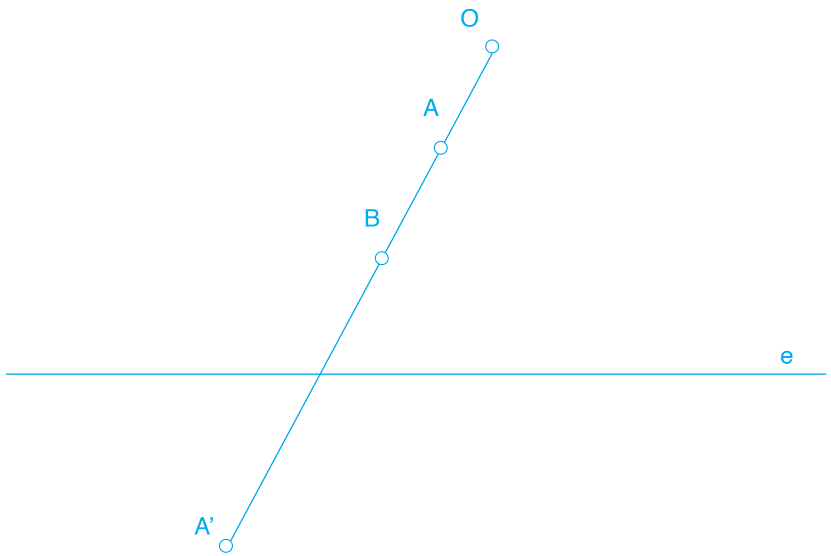


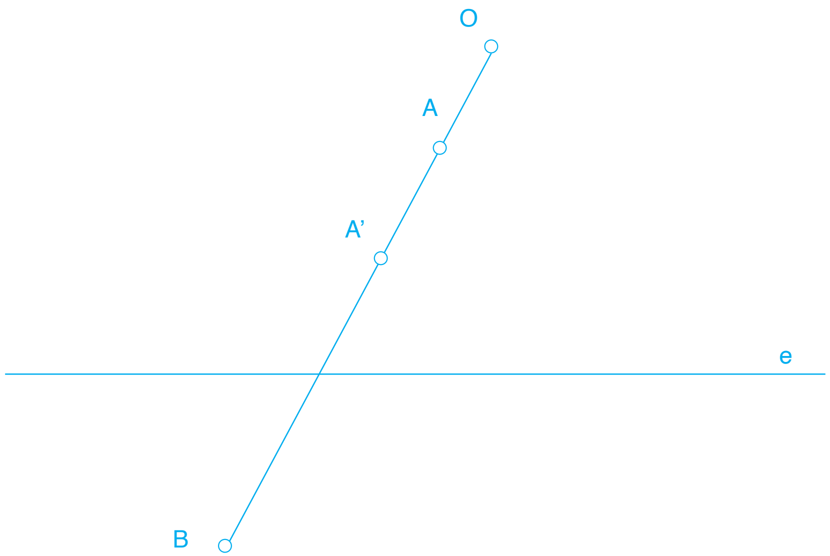




Halla el homólogo B' del punto B, conocido el centro de homología, O y los puntos homólogos A y A', alineados con B

1. Se elige un punto ***C***, arbitrario, y se une con ***A*** mediante la recta ***r*** que corta al eje en ***R***.
2. Se une ***R*** con ***A'*** mediante la recta ***r'*** (homóloga de la recta ***r***).
3. Se traza la recta que une el centro ***O*** con el punto ***C*** hasta cortar a ***r'*** en ***C'***.
4. Se une ***C*** con ***B*** mediante la recta ***s***, que corta al eje en ***S***.
5. Se traza la recta ***s'*** (homóloga de ***s***) uniendo los puntos ***S*** y ***C'***.
6. Donde la recta ***s'*** corta a la recta ***AA'*** se obtiene el punto ***B'*** buscado.

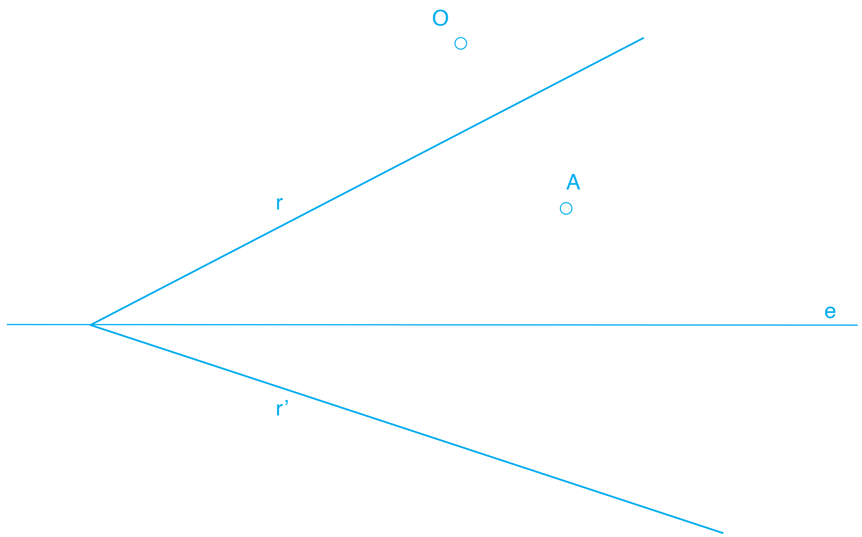




2.2.2. Dado el centro el eje y un par de rectas homólogas.

Halla el homólogo A' del punto A, conocido el centro de homología, O, el eje e y un par de rectas homólogas r y r'.

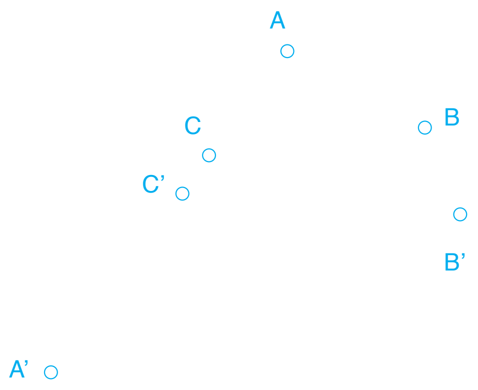
1. Se elige un punto ***B*** cualquiera de la recta ***r,*** y se une con el centro ***O*** hasta cortar a ***r'*** en el punto ***B'***, homólogo de ***B***.
2. Se unen los puntos ***A*** y ***B*** mediante la recta ***s*** que corta al eje en el punto ***C-C'***.
3. El punto ***C-C'*** se une con ***B'*** mediante la recta ***s'***, homóloga de la recta ***s***.
4. Se une el centro ***O*** con el punto ***A*** hasta cortar a la recta ***s'*** en el punto ***A'*** solución.



2.2.3. Dados tres puntos no alineados y sus homólogos

Dados los puntos ABC y sus homólogos A'B'C', determinar el centro y el eje de homología

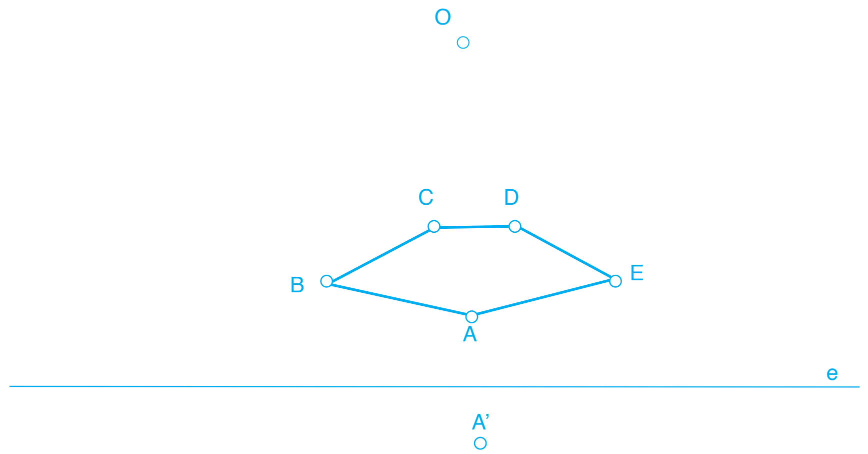
Los puntos homólogos estarán alineados con el centro de homología y las rectas homólogas que los unen se cortarán en el eje de homología.



2.3. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS HOMÓLOGAS .

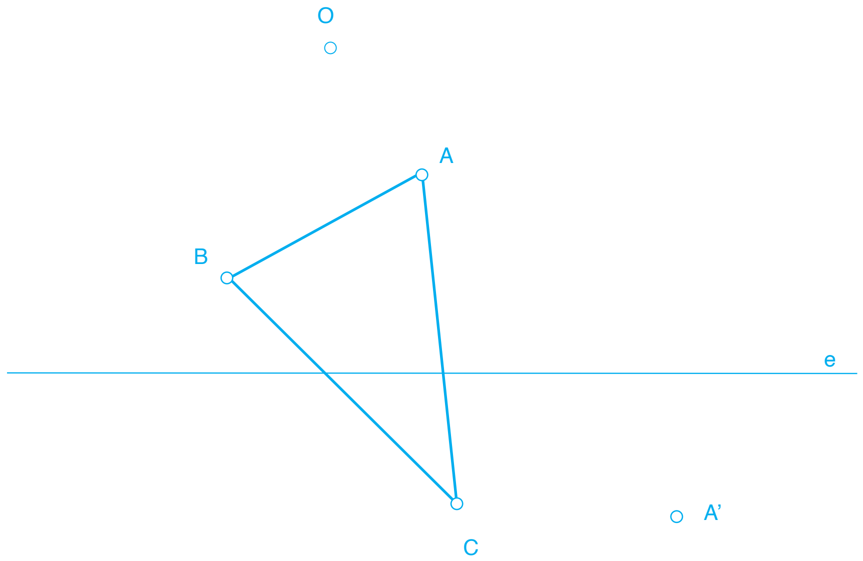
2.3.1. Construir la figura homóloga del polígono ABCDE, conocido el centro O, el eje e y un punto homólogo A’

1. Aplicando el procedimiento general, se une el punto ***A*** con cualquier otro, el ***B*** por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto ***M***.
2. El punto ***M*** se une con ***A'*** mediante una recta que corta al rayo ***OB*** en el punto ***B'***.
3. Se une el punto ***C*** con el punto ***B***. o con cualquier otro del que ya se conozca su homólogo, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los homólogos de todos los vértices.



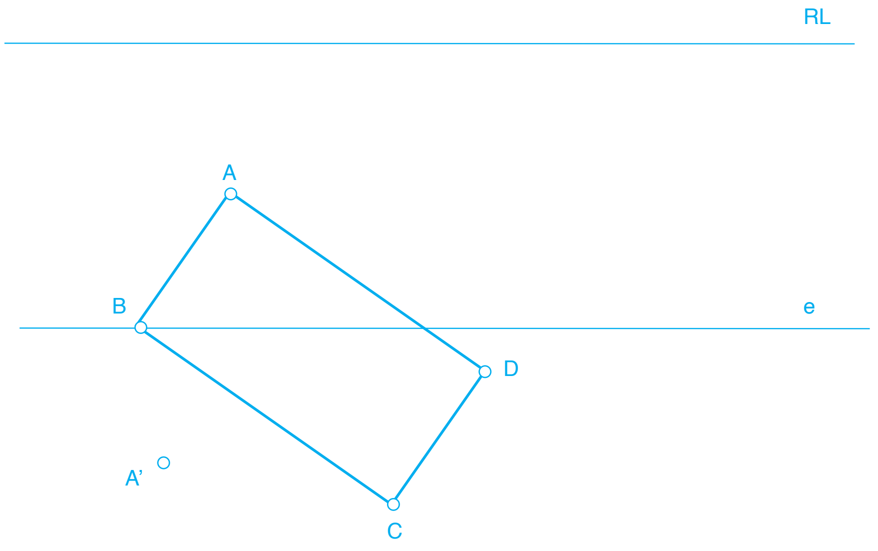
2.3.2 Construir la figura homóloga del triángulo ABC, conocido el centro O, el eje e y un punto homólogo A’

Seguimos los mismos pasos que en el ejercicio anterior, teniendo en cuenta que los puntos donde el triángulo ***ABC*** corta al eje son puntos dobles y pertenecen también al triángulo homólogo buscado.



2.3.3. Construir la figura homóloga del rectángulo ABCD, conocidos la recta límite, el eje e y un punto homólogo A' de A.

1. Prolongamos la recta ***BA*** hasta cortar a la resta límite en ***N***.
2. Por el punto ***N*** trazamos una paralela a ***A'B'*** (***B'*** coincide con ***B***), hasta cortar a la recta que pasa por ***A*** y ***A'*** en ***O***, centro de homología.
3. Procedemos como en los casos anteriores para determinar el resto de puntos.



2.4. CÓNICAS HOMOLÓGICAS DE UNA CIRCUNFERENCIA

La figura homóloga de una circunferencia es siempre una curva cónica existen tres casos, en función de la posición relativa entre la circunferencia y la Recta Límite RL'.

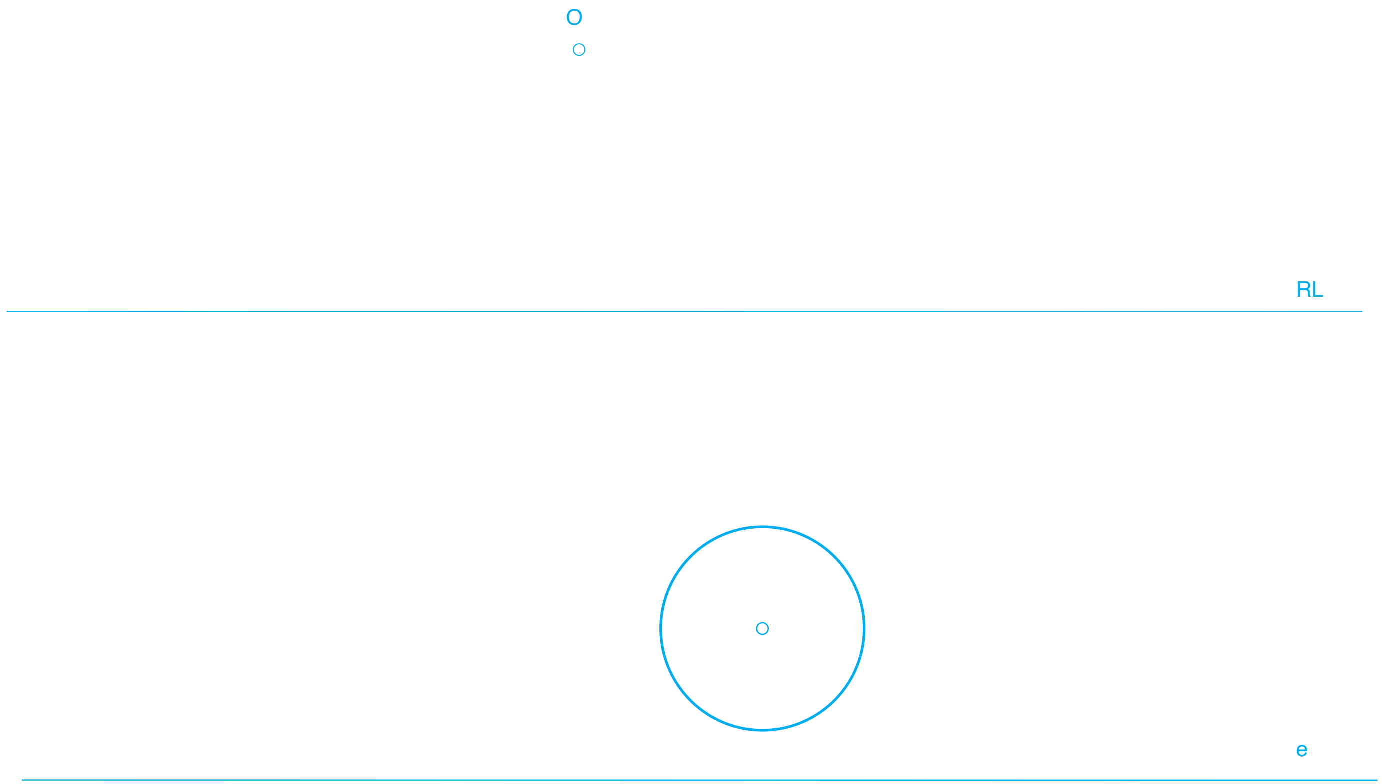
- Si la circunferencia es exterior a la recta límite, la figura homóloga será una **elipse**.
- Si la circunferencia es tangente a la recta límite, la figura homóloga es una **parábola**.
- Si la circunferencia es secante a la recta límite, la figura homóloga es una **hipérbola**.

Si dos cónicas homológicas se cortan, la recta que une los puntos intersección es el eje de homología, si son tangentes, la tangente común es el eje.

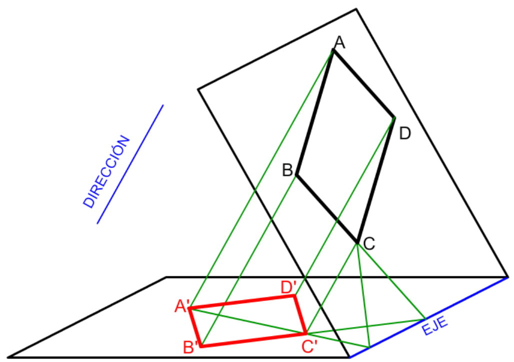
2.4.1. Transformación homológica de la circunferencia en elipse.

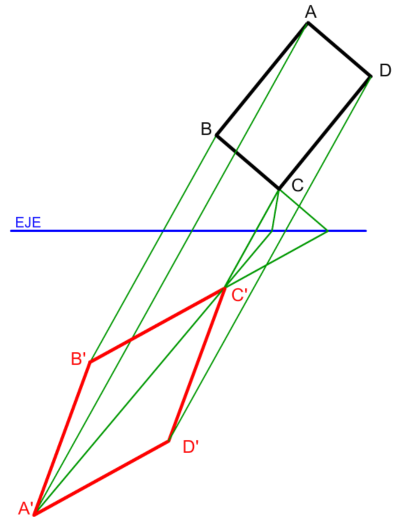
Sean ***O*** el centro de homología, ***e*** el eje y ***RL*** la recta límite de la circunferencia exterior a ella para que se transforme en elipse.

1. Tracemos por ***O*** una recta cualquiera (***O A***), la cual corta a ***RL*** en el punto ***A***.
2. Desde el punto ***A*** se trazan las tangentes a la circunferencia en los puntos T_1 y T_2, respectivamente. Prolongando la cuerda T_1 T_2 se obtiene sobre ***RL*** el punto ***B***.
3. Desde el punto ***B*** volveremos a trazar las tangentes a la circunferencia en tos puntos T_3 y T_4.
4. Unimos los puntos de tangencia entre sí T_1 T_2 y T_3 T_4. Estas dos cuerdas son las rectas homólogas de dos diámetros conjugados de la elipse, luego las direcciones ***OA*** y ***OB*** son paralelas a los diámetros conjugados que se tratan de obtener.
5. Obtengamos por el procedimiento general descrito los homólogos de T'_1 ,T'_2 ,T'_3 y T'_4 con fo cual tendremos definidos dos diámetros conjugados de la elipse.



3. AFINIDAD





La afinidad es una homología de centro impropio, es decir que está en el infinito.
Los elementos de la afinidad son los mismos que los de la homología, exceptuando el centro, que no tiene al ser los rayos o rectas proyectantes paralelas entre sí, tampoco existen rectas límite.

La dirección de afinidad es el ángulo formado por los rayos proyectantes con el eje.

La afinidad es una transformación geométrica de una figura a otra coplanarias, de manera que se corresponde punto a punto y recta a recta respetando las siguientes leyes:

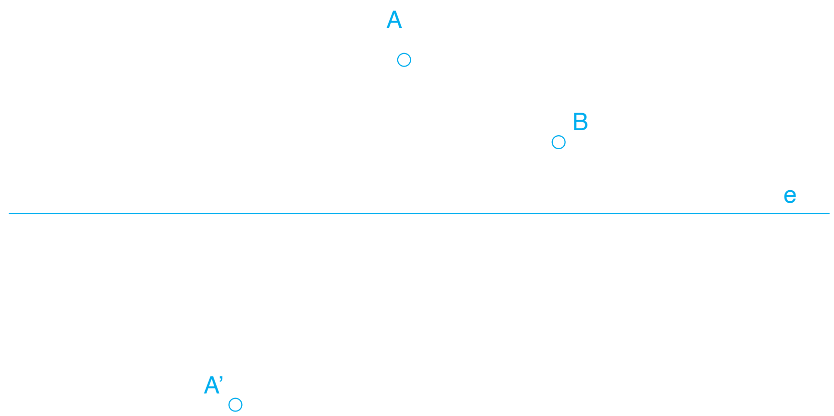
- La recta que unen dos puntos afines es paralela a una dirección d de afinidad.
- Dos rectas afines se cortan en un punto del eje de afinidad.
- El paralelismo de dos rectas se mantiene en su transformación afín.

3.1. DETERMINACIÓN DE UNA AFINIDAD.

3.1.1. Determinación de una afinidad conocidos el eje y dos puntos afines

Halla el afín B' del punto B, conocido el eje y dos puntos homólogos A y A'

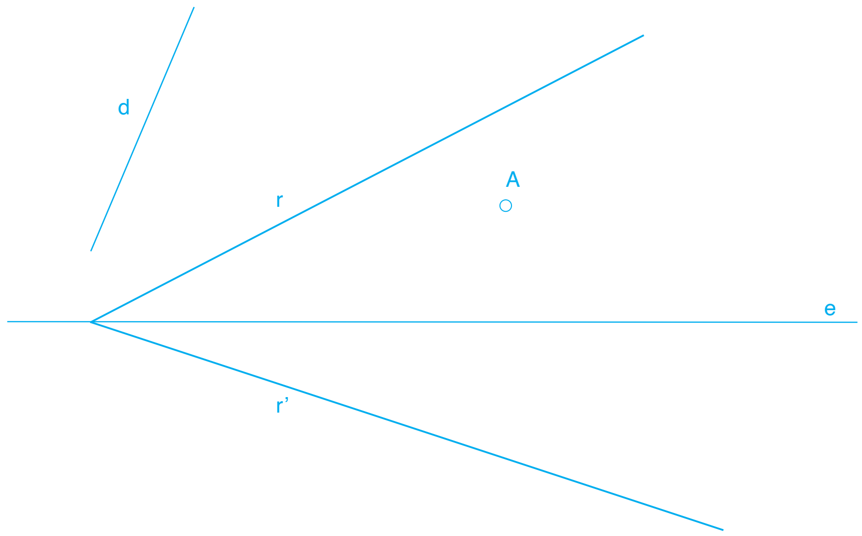
1. Unimos los puntos ***A*** y ***B*** mediante la recta ***r***, que corta al eje en el punto ***C-C'***.
2. El punto ***C-C'***.se une con el punto ***A'*** mediante la recta ***r'*** afín a la recta ***r***.
3. Por el punto ***B*** se traza una recta paralela a la dirección de afinidad, ***AA',*** hasta cortar a la recta ***r'*** en el punto ***B'*** solución***.***



3.1.2. Determinación de una afinidad conocidos la dirección de afinidad, el eje y un par de rectas afines.

Halla el afín A' del punto A, conocido el eje, la dirección de afinidad d y dos rectas homólogas r y r'

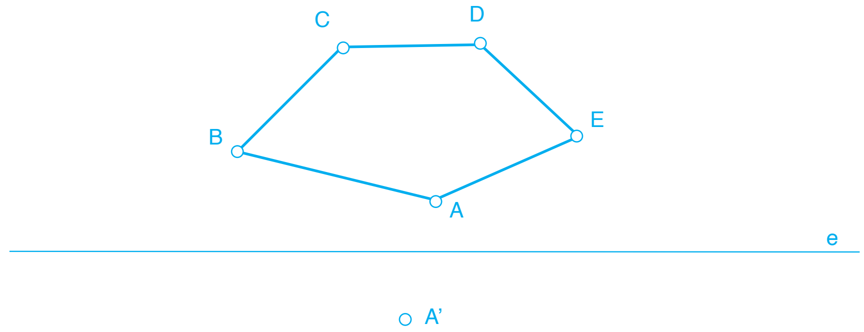
1. Se elige un punto ***B*** cualquiera de la recta ***r*** y se traza la paralela a la dirección ***d*** hasta cortar a ***r'*** en el punto ***B'*** afín del punto ***B.***
2. Unimos los puntos ***A*** y ***B*** mediante la recta ***s***, que corta al eje en el punto ***C-C'***.
3. El punto ***C-C'*** se une con el punto ***B'*** mediante la recta ***s'*** afín a la recta ***s***.
4. Por el punto ***A*** se traza una recta paralela a la dirección de afinidad ***d,*** hasta cortar a la recta ***s'*** en el punto ***A'*** solución.



3.2. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS AFINES.

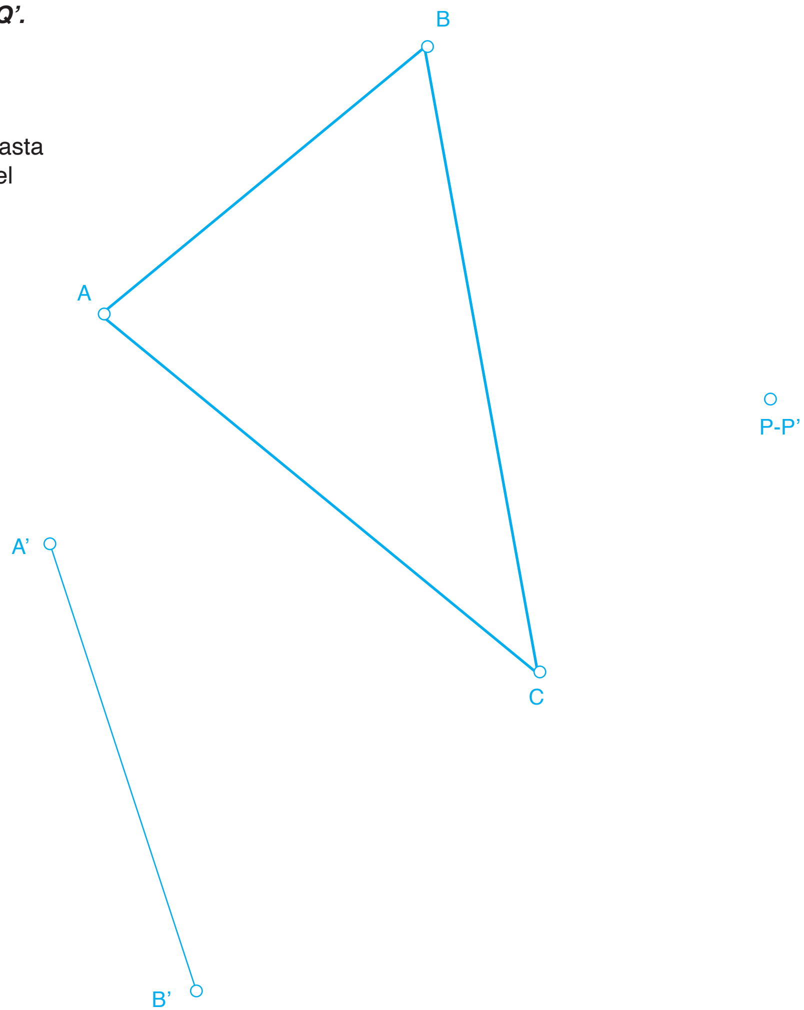
3.2.1. Construir la figura afín del polígono ABCDE, conociendo el eje e y un punto afín A'

1. Aplicando el procedimiento general, se une el punto ***A*** con cualquier otro, el ***B*** por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto ***M***.
2. El punto ***M*** se une con ***A'*** mediante una recta que corta al rayo paralelo a la dirección de afinidad trazado por ***B*** en el punto ***B'***.
3. Se une el punto ***C*** con el punto ***B***, o con cualquier otro del que ya se conozca su afín, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los afines de todos los vértices.



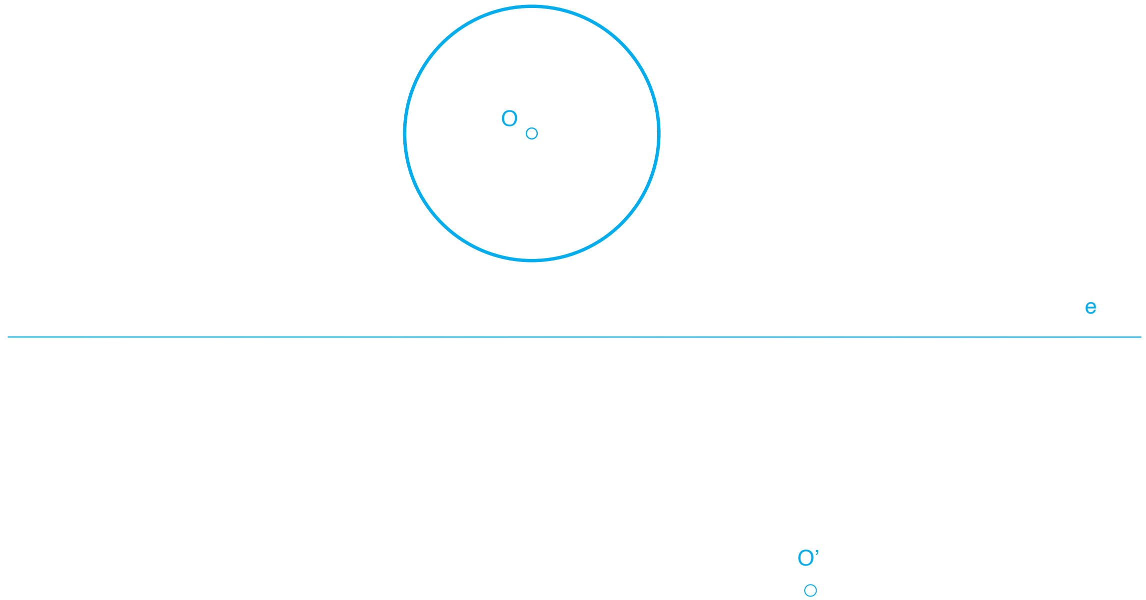
3.2.2 Construir la figura afín del triángulo ABC, conocidos los lados afines AB y AB'y un punto doble P-P'

1. Unimos mediante una recta los puntos afines, determinando la dirección de afinidad.
2. Prolongamos los lados ***AB*** y ***A'B'*** hasta cortar, determinando en el punto doble ***Q-Q'.***
3. Uniendo los puntos dobles dibujamos el eje de afinidad.
4. El eje de afinidad corta al triángulo en ***ABC*** en los puntos dobles ***RR'*** y ***SS'.***
5. Unimos mediante una recta el vértice ***A'*** con el punto doble ***RR'*** y lo prolongamos hasta que corte a la recta que pasa por el vértice ***B'*** y el punto doble ***SS'***. determinando el vértice ***C'.***
6. Dibujamos el triángulo afín uniendo los puntos ***A'***, ***B'*** y ***C'***



3.2.3. Transformación afín de la circunferencia en elipse.

Dada la circunferencia de centro O, el eje y el punto O' afín de O.



1. Se traza la mediatriz del segmento ***O O'*** hasta cortar al eje en el punto ***E*** con centro en ***E*** y radio ***EO*** = ***EO'*** se traza la circunferencia que corta al eje en los puntos dobles ***F-F'*** y ***G-G'***.
2. Las rectas ***r*** y ***s*** que unen estos puntos con ***O*** tienen sus afines en las rectas ***r'*** y ***s'*** que unen ***F-F'*** y ***G-G'*** con ***O'***.
3. Por los puntos ***A***,***B***,***C*** y ***D*** de intersección de las rectas ***r*** y ***s*** con la circunferencia se trazan paralelas a la dirección de afinidad ***OO'***, obteniendo así los ejes ***A'B'*** y ***C'D'***.
4. Para dibujar la elipse se puede seguir cogiendo puntos de la circunferencia y calculando sus afines, o bien trazarla por alguno de los métodos conocidos.

Circunferencia y elipse de diámetro común

Dada la circunferencia de diámetro ***AB-A'B'*** y un par de puntos afines ***C-C'***.

1. **Eje de afinidad**. Es el diámetro común ***AB-A'B'*** de ambas cónicas.
2. **Dirección de afinidad.** Es la recta ***C-C'***.
3. **Trazado de la elipse.** Por el punto ***C*** se traza la perpendicular al eje hasta cortarlo en el punto ***M***. Por cualquier otro punto ***N*** del eje se traza la perpendicular hasta cortar a la circunferencia en el punto ***E***. Por ***N*** se dibuja la paralela a ***MC'***, y por ***E*** la paralela a ***CC'*** , ambas paralelas se cortan en el punto ***E'*** de la elipse y así sucesivamente.