# **TEMA 2**. CURVAS TÉCNICAS: CURVAS CÍCLICAS Y CÓNICAS

## CONTENIDO

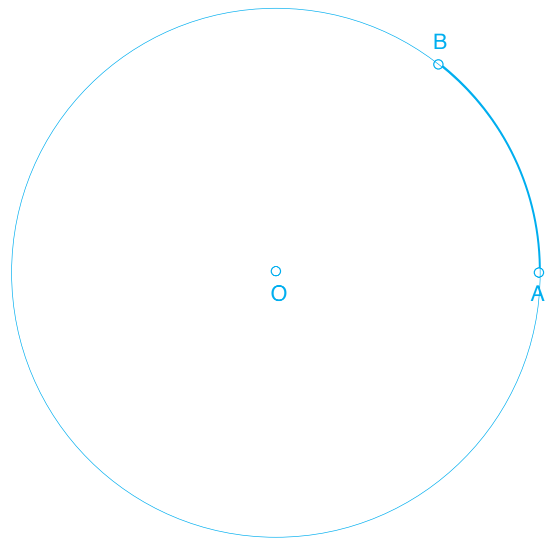


**CRITERIOS DE EVALUACIÓN**

1.2. Dibujar curvas cíclicas y cónicas, identificando sus principales elementos y utilizando sus propiedades fundamentales para resolver problemas de pertenencia, tangencia o incidencia.. (**8% del curso**).

# O. RECTIFICACIONES

## Rectificación de un arco menor de 90º

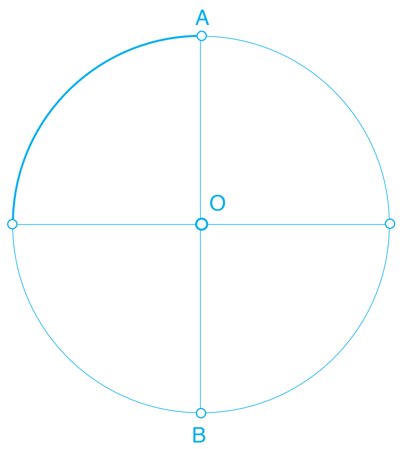



Rectificar un arco de circunferencia es hallar el segmento recto cuya longitud sea igual a la del arco dado.

Sea el arco ***AB*** de centro ***O***:

1. Por uno de los extremos del arco, el punto ***A***, se traza el diá- metro ***AC*** y la recta ***r*** tangente al arco.
2. Se divide el radio ***OC*** en cuatro partes iguales, y haciendo centro en el punto ***C*** y tomando como radio tres de esas cuatro partes, se describe un arco hasta cortar a la prolongación del diámetro en el punto ***D***.
3. Se une el punto ***D*** con el otro extremo ***B*** del arco hasta cortar a la recta tangente ***r*** en el punto ***E***. El segmento ***AE*** es la rectificación del arco ***AB***.

## Rectificación de un arco de 90º




Sea la circunferencia de centro ***O***:

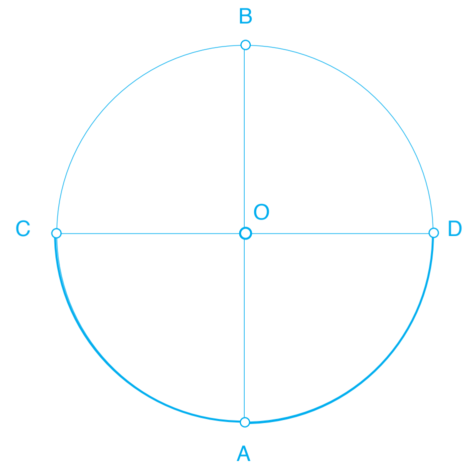
1. Con centros en los extremos ***A*** y ***B*** de un diámetro se describen dos arcos del mismo radio que la circunferencia, hasta cortar a esta en ***C*** y ***D***.
2. Con centro en ***A*** y radio ***AD***, y centro en ***B*** y radio ***BC*** se trazan dos arcos que se cortan en ***E***.
3. Por último, con centro en ***C*** y radio ***CE*** se describe otro arco que corta a la circunferencia en ***F***. El segmento ***AF*** es la rectificación del arco de 90º.

También podría haberse aplicado el procedimiento del caso anterior.

## Rectificación de una semicircunferencia

Sea la circunferencia de centro ***O***:

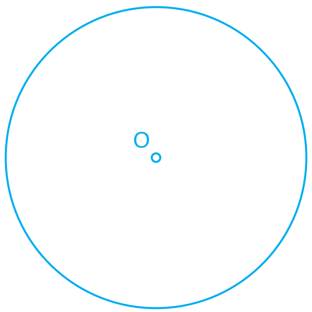
1. Se trazan dos diámetros ***AB*** y ***CD*** perpendiculares entre sí, y con centro en ***B*** y radio ***BO*** se dibuja un arco que corta a la circunferencia en el punto ***E***.
2. Con centro en ***A*** y radio ***AC*** (lado del cuadrado inscrito). y con centro en ***A*** y radio ***AE*** (lado del triángulo inscrito) se trazan dos arcos que cortan a la recta tangente a la circunferencia en el punto ***A***, en ***F*** y ***G***. El segmento ***FG*** es la rectificación buscada.




## Rectificación de una circunferencia

La longitud de una circunferencia es, aproximadamente. igual a tres veces el diámetro más una séptima parte del mismo; por tanto, dada la circunferencia de centro ***O***:

1. Se traza un diámetro cualquiera ***AB*** y se divide en siete partes iguales.
2. Sobre una recta r, y a partir de un punto ***C*** se lleva tres veces el diámetro más una de las siete partes en que se ha dividido. El segmento ***CD*** total es la rectificación de la circunferencia.



# 1. CURVAS CÍCLICAS

Son curvas lugares geométricos de las posiciones de un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta o sobre otra circunferencia.
A las curvas cíclicas también se les denomina mecánicas por sus aplicaciones en el diseño de piezas.
En las curvas cíclicas interviene dos elementos:

- **Ruleta (o generatriz):** Es la curva (círculo o circunferencia que rueda) móvil.
- **Base (o directriz):** Es la curva o recta fija, el camino sobre el que rueda la ruleta.

Si tomamos un punto relacionado de forma invariable con la ruleta (siempre se encuentra en la misma posición respecto a ésta) y trazamos su trayectoria durante el movimiento de la ruleta sobre la base, la curva obtenida se denomina curva técnica.

La base y la ruleta son siempre una circunferencia o una recta.
Si la ruleta es circular podrá ser exterior o interior a la base según donde se produzca el rodamiento.
Si la ruleta es una recta será siempre exterior.

## 1.1. CICLOIDE

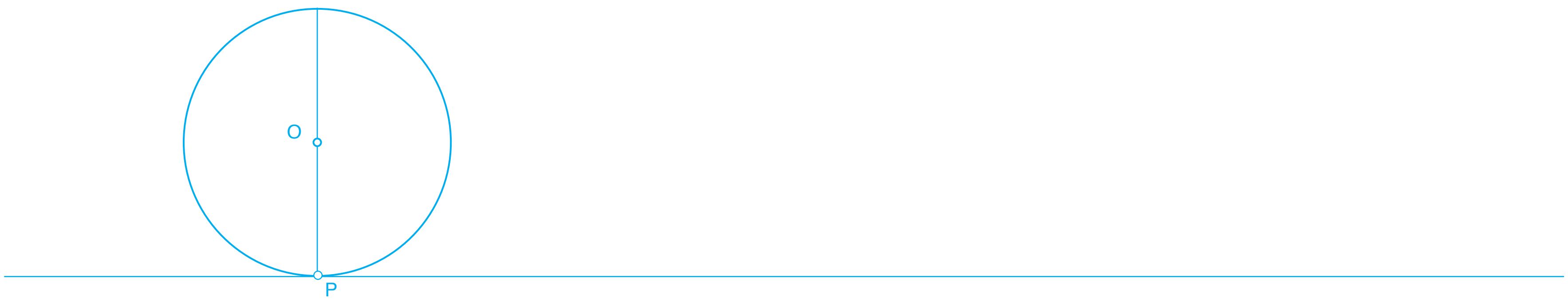
Es una curva plana, lugar geométrico de las distintas posiciones de un punto móvil contenido en una circunferencia (**ruleta**) que rueda sin resbalar sobre una recta (**base**)
La **CICLOIDE** puede ser **normal** si el punto que se desplaza es uno de los de la circunferencia, **acortada** si es un punto interior y **alargada** si es exterior.

Sea el punto generador $P$ de la circunferencia de centro $O$:

1. Se divide la circunferencia ruleta en un número cualquiera de partes iguales: en este caso, en 12.
2. Sobre la recta base y a partir del punto $P$ se lleva la longitud de la circunferencia de centro $O$ rectificada y se divide en el mismo número de partes iguales: es decir, en 12, obteniendo el segmento $PP_{12}$.
3. Por cada uno de los puntos de división de la ruleta se trazan rectas paralelas a la base.
4. Por cada uno de los puntos de división de la base $1'$, $2'$ ... $12'$ se trazan las rectas perpendiculares a ella hasta cortar en $O_1$, $O_2$, $O_3$ ... $O_{12}$ a la recta paralela a la base trazada por el punto $O$, centro de la ruleta.
5. Se dibujan las circunferencias de centros $O_1$, $O_2$, $O_3$ ... $O_{12}$. Y donde se vayan cortando con las correspondientes rectas paralelas a la base de divisió de la ruleta, se van obteniendo los puntos $P_1$, $P_2$ ... $P_{12}$ de la cicloide normal.

**Cicloide acortada y alargada**
Sean los puntos $P'$ y $P''$, unidos a la ruleta; uno exterior y otro interior a la misma:

- Sobre cada uno de los segmentos $O_1P_1$, $O_2P_2$ ... $O_{12}P_{12}$, y a partir de los centros $O_1$, $O_2$ ... $O_{12}$ se llevan las distancias fijas $OP'$ y $OP''$, obteniendo así los puntos $P'_1$, $P'_2$ ... $P'_{12}$ de la cicloide alargada, y los puntos $P''_1$, $P''_2$ ... $P''_{12}$ de la cicloide acortada.



## 1.2. EPICICLOIDE

Es una curva plana, lugar geométrico de las posiciones de un punto de una circunferencia (**ruleta**) que rueda exteriormente, sin resbalar, sobre otra circunferencia (**base**).

### Epicicloide normal

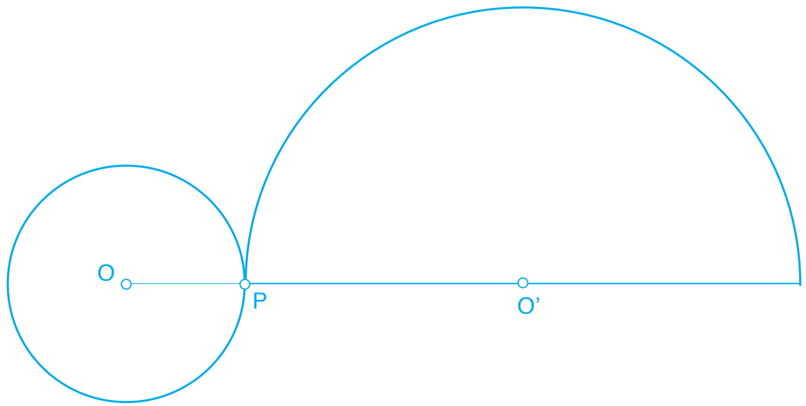
Sea la circunferencia de centro ***O’*** y radio ***O’ P*** la base, y la circunferencia de centro ***O*** y radio ***OP*** la ruleta. El punto generador es el punto ***P*** de la circunferencia.

1. Se divide la ruleta de centro ***O*** en un número de partes iguales, por ejemplo 8, numerando los puntos de división ***1***, ***2,*** ... ***8***.
2. Se rectifica el arco ***P1*** de la circunferencia ruleta, y se halla el arco ***P1’*** de la circunferencia de centro ***O’***, que corresponde a dicha longitud.
3. Estas divisiones se trasladan sobre la base tantas veces como se haya dividido la ruleta, numerando a continuación los puntos ***1’***, ***2’***,. . . ***8’***.
4. Con centro en ***O’***, se trazan los arcos que pasan por cada uno de los puntos ***1***, ***2***,..., ***8*** en que se ha dividido la ruleta inicialmente.
5. Se traza el arco de centro ***O’*** y radio ***OO’***, que al cortarse con la prolongación de los radios ***O’1’***, ***O’2’*** ... ***O’8’*** se obtienen los puntos ***O1***, ***O2*** ... ***O8***, centros de las sucesivas posiciones que va adoptando la ruleta al rodar.
6. El punto $P_1$ de la curva se obtiene al cortarse la circunferencia de centro $O_1$ y radio $O_1 1'$ con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto ***1***, y así sucesivamente con el resto de los puntos.

### Epicicloides acortada y alargada

Sean los puntos ***P’*** y ***P”*** unidos solidariamente a la ruleta, uno interior y otro exterior a la misma.

- Sobre los segmentos $O_1P_1$, $O_2P_2$ .. y a partir de los $O_1$, $O_2$... se llevan distancias fijas ***OP’*** y ***OP”*** obteniendo así los puntos $P'_1$, $P'_2$... de la epicicloide acortada, y los puntos $P''_1$, $P''_2$... de la epicicloide alargada.



## 1.3. HIPOCICLOIDE

Es una curva plana, lugar geométrico de las posiciones de un punto de una circunferencia (**ruleta**) que rueda interiormente, sin resbalar, sobre otra circunferencia (**base**).

### Hipocicloide normal

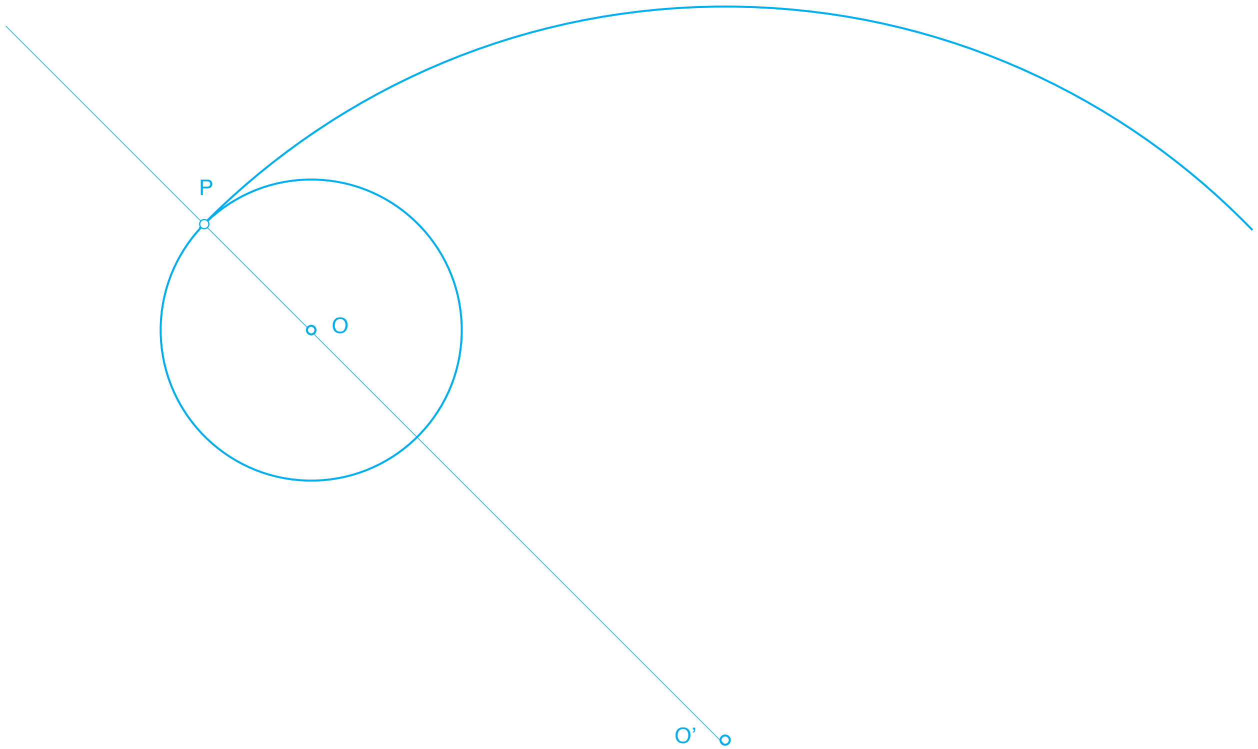
Sea la circunferencia de centro ***O*** y radio ***OP*** la ruleta, y la circunferencia de centro ***O'*** y radio ***O' P*** la base. El punto generador es el ***P***:

1. Se divide la ruleta de centro ***O*** en un número de partes iguales, por ejemplo en 8, numerando los puntos de división ***1, 2, 3... 8***.
2. Se rectifica el arco ***P1*** de la ruleta de centro O de una de las divisiones, hallando a continuación el arco rectificado ***P1'*** de la circunferencia base de centro ***O'***.
3. Estas divisiones se van trasladando sobre la base tantas veces como se haya dividido la ruleta, obteniendo los puntos ***1',2'... 8'***.
4. Con centro en ***O'***, se trazan los arcos que pasan por los pun- tos ***1,2,... 8*** de la ruleta.
5. Se traza el arco de centro ***O'*** y radio ***O'O***, que al cortarse con los radios ***O'1, O'2***,... ***O'8***, se obtienen los puntos $O_1$, $O_2$, ... $O_8$, centros de las sucesivas posiciones que va adoptando la ruleta al rodar sin resbalar.
6. El punto $P_1$ de la curva se obtiene por intersección de la circunferencia de centro $O_1$ y radio $O_1$ ***1'*** con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto ***1***. De forma análoga, se obtienen los demás puntos de la curva $P_2$ , $P_3$,... $P_8$.

### Hipocicloides alargada y acortada

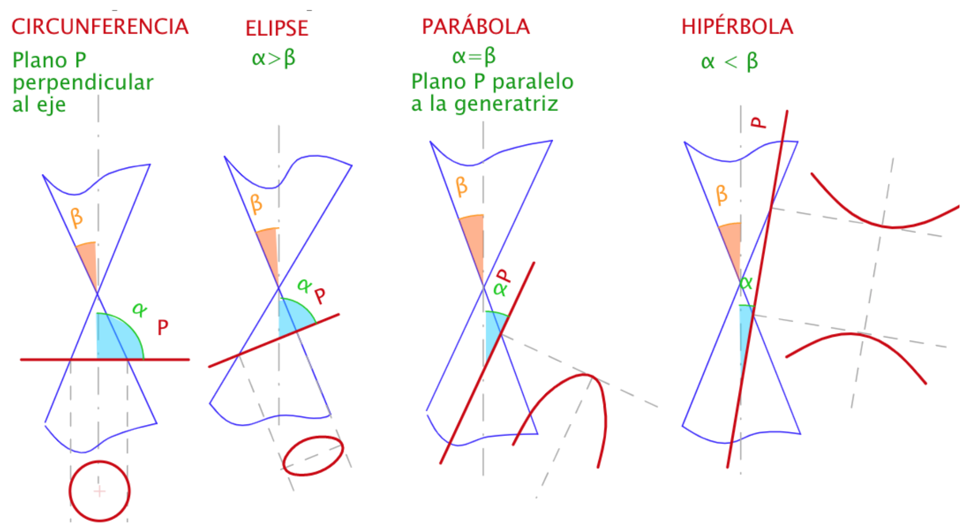
Sean los puntos ***P'*** y ***P''*** unidos solidariamente a la ruleta, uno interior y otro exterior:

- Sobre los segmentos $O_1P_1$, $O_2P_2$,...$O_8P_8$ , y a partir de los centros $O_1$, $O_2$... $O_8$ se llevan las distancias fijas ***OP''*** y ***OP'***, obteniendo los puntos $P''_1$, $P''_2$... $P''_8$ de la epicicloide alargada y los ***P'***, $P'_2$... $P'_8$ de la epicicloide acortada.



# 2. CURVAS CÓNICAS

Se llaman curvas cónicas a las curvas que se obtienen de la intersección de una superficie cónica por un plano.




**Secciones de un cono**

Supongamos un cono de revolución de dos ramas; según sea la posición de un plano secante respecto del eje del cono, en relación con el ángulo del vértice, se obtienen las siguientes curvas:

- **Circunferencia**

Cuando el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica, y no pasa por el vértice, la sección es una circunferencia. (**β = 90º**)

- **Elipse**

Si el plano secante forma con el eje de la superficie cónica un ángulo mayor que semiángulo en el vértice del cono, el plano corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, entonces la sección es una curva cerrada que se denomina elipse. (**α < β**)

- **Parábola**

Si el plano secante forma con el eje del cono el mismo ángulo que el semiángulo en el vértice o , lo que es lo mismo, es paralelo a una generatriz, la curva que resulta es abierta con un punto en el infinito llamada parábola (**α = β**).

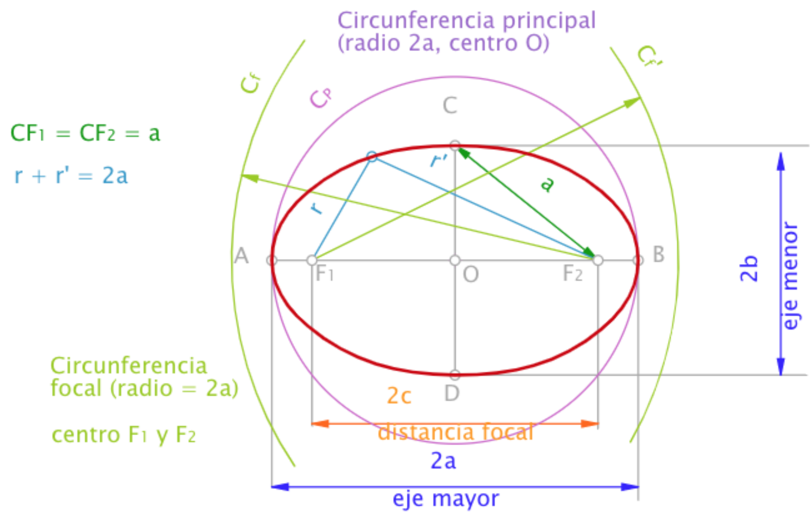
- **Hipérbola**

Cuando el plano secante forma con el eje del cono un ángulo menor que semiángulo en el vértice, entonces el plano corta a las dos ramas del cono y la sección es una curva abierta de dos ramas que se llama hipérbola. (**α > β**).

## 2.1. ELIPSE

La elipse se define pues como la curva cerrada y plana, lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de distancias de cada uno de ellos a otros dos fijos, llamados **focos**, es constante.

- La distancia entre los focos recibe el nombre de **distancia focal**. La distancia focal se designa por **2c**.
- La suma de distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual al ***eje mayor*,** llamado también eje real, y se designa por **2a**.
- El **eje menor** se llama eje imaginario y se representa por **2b**.
- Las rectas que unen un punto cualquiera de la curva con los focos se llaman r**adios vectores, r y r'** . Según hemos dicho, para cualquier punto de la elipse se verifica que **r + r' = 2a.**
- Entre a, b y c existe la relación $a^2=b^2+c^2$
- **Circunferencia principal (Cp)** es aquella que tiene por diámetro el eje mayor.
- **Circunferencias focales o directrices (Cf y Cf')** son aquellas que tienen por centro uno de los focos y de radio la longitud del eje mayor 2a.



### 2.1.1 Construcción de la elipse conociendo los ejes

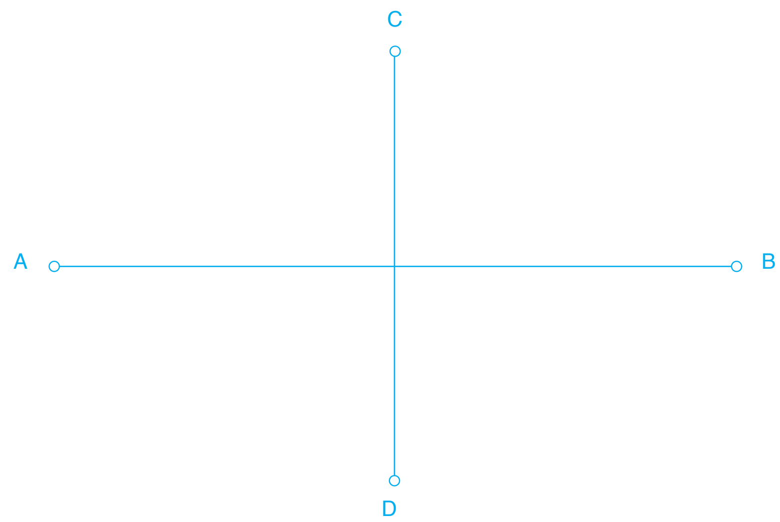
**Método: por puntos**

Sean los ejes ***AB*** y ***CD***:

1. Se hallan los focos $F_1$ y $F_2$:

- Se traza un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor, ***C*** y radio el semieje mayor ***OA*** hasta cortar al eje ***AB*** en los puntos y $F_1$ y $F_2$ que son los focos.

2. Se toma un punto ***1*** cualquiera del eje mayor, situado entre uno de los focos y el centro, y con radio ***A1*** y centro en $F_1$ se traza un arco y con radio ***B1*** y centro $F_2$ se traza otro arco, estos dos arcos se cortan en el puntos ***S*** y ***V*** de la elipse.
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos ***2, 3***, etc., se van determinando puntos de la elipse que posteriormente se unen a mano o con plantilla.

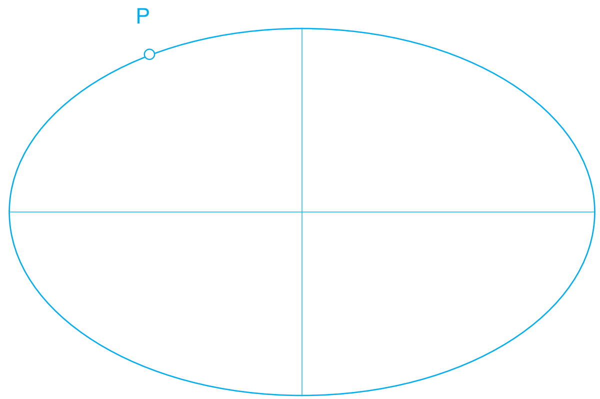



### 2.1.2 Tangente y normal a la elipse

- La recta **tangente** a una elipse en un punto ***P*** de ella es la recta ***t***, bisectriz exterior del ángulo formado por los dos radios vectores $PF_1$ y $PF_2$.
- La **normal** a la elipse en el punto ***P*** es la perpendicular a la tangente, y a su vez la bisectriz interior de los radio vectores $PF_1$ y $PF_2$.

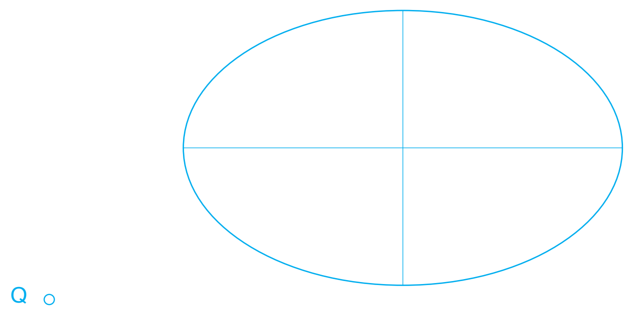
1. Se hallan los focos $F_1$ y $F_2$:
2. Se trazan rectas desde $F_1$ y $F_2$ y que pasen por ***P***.
3. Las recta tangente será la bisectriz interior formada por $PF_1$ y $PF_2$.

Todo punto simétrico de un foco respecto a la tangente, se encuentra en la circunferencia focal trazada con centro el otro foco. También se podría haber trazado la tangente determinando la mediatriz del foco y de su simétrico.



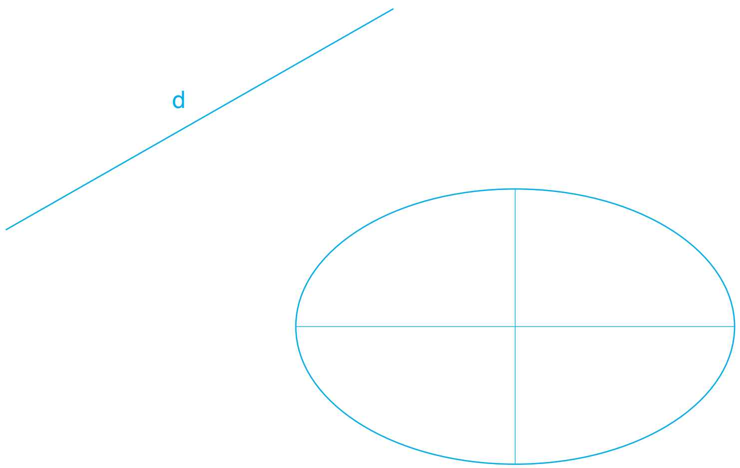
### 2.1.3 Tangente a la elipse desde un punto exterior Q

1. Determinamos los focos $F_1$ y $F_2$
2. Trazamos la circunferencia focal de centro $F_2$ y la circunferencia de centro ***Q*** y radio $QF_1$ cortándose en los puntos ***M*** y ***N***
3. Unimos los puntos ***M*** y ***N*** con $F_1$ y hallamos las mediatrices de $MF_1$ y $NF_1$ que serán las tangentes que pasan por el punto ***Q***.
4. Los puntos de tangencia los obtenemos en las intersecciones de las rectas $F_2M$ y $F_2N$ con las tangente.




### 2.1.4 Tangente a la elipse paralelas a una dirección dada

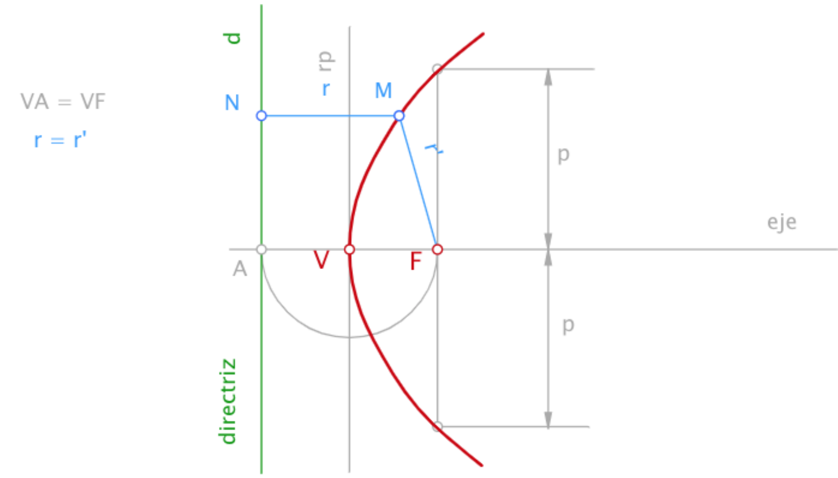
1. Trazamos la circunferencia focal de centro $F_1$.
2. Dibujamos la perpendicular a la dirección por $F_2$ que corta en ***N*** y ***M*** a la circunferencia focal.
3. Trazamos las mediatrices $MF_2$ y $NF_2$ que serán las tangentes pedidas.
4. Los puntos de tangencia los obtenemos en las intersecciones de las rectas $F_1M$ y $F_1N$ con las tangentes.



## 2.2. PARÁBOLA

La parábola es una curva abierta y plana, de una sola rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco** y de una recta fija d, llamada **directriz**.

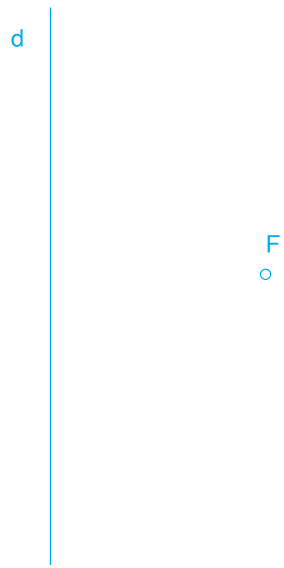
- Tiene un **eje de simetría** que pasa por el ***vértice*** o punto de intersección del eje con la curva, siendo la tangente en dicho vértice paralela a la directriz y, por tanto, perpendicular al eje.
- El vértice, por ser un punto de la curva, equidista del foco y de la directriz, siendo la distancia del mismo a cada uno igual al semiparámetro (**VA = VF = P/2**).
- Se llama **parámetro** 2p de la parábola, a la longitud de la cuerda que, pasando por el foco, es perpendicular al eje.
- La **circunferencia principal** es la tangente a la curva en el vértice.
- Los **radios vectores** de la parábola son FM y MN, de forma que FM = MN.
- La directriz d de la curva hace de **circunferencia focal** de la parábola, en este caso de radio infinito. Según esto, la directriz es lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente.



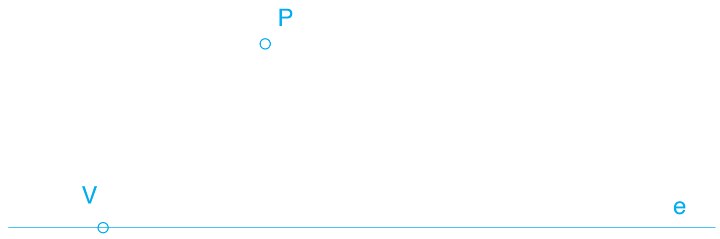

### 2.2.1 Construcción de la parábola conocidos el foco y la directriz

Dada la directriz ***d*** y el foco ***F***:

1. Dibujamos el eje ***e*** tranzando la perpendicular a ***d*** por ***F***, que corta a d en ***A.***
2. Determinamos el vértice ***V***, trazando la mediatriz ***AF.***
3. Se toma un punto cualquiera ***1*** del eje a partir de ***V*** y se traza la recta ***m*** perpendicular al eje.
4. Con centro en el foco ***F*** y radio ***A1*** se traza un arco que corta a la perpendicular ***m*** en los puntos ***P*** y ***P´***, puntos de la parábola.
5. Repitiendo la misma operación con otros puntos ***2***, ***3***,... , se obtienen puntos que unidos posteriormente a mano o con plantilla, nos determinan la parábola.



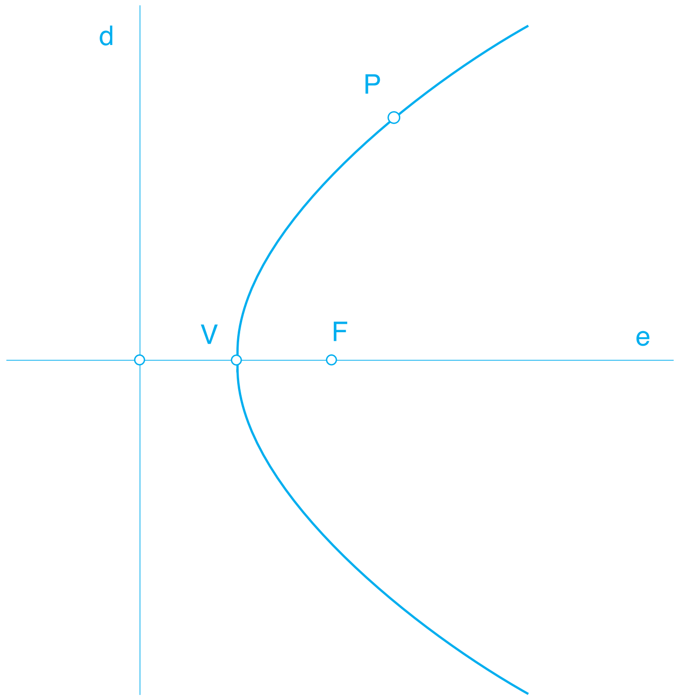
## 2.2.2 Construcción de la parábola conocidos el eje, el vértice y un punto de la curva.




Dado el eje ***e,*** el vértice ***V*** y el eje ***e***:

1. Trazamos una perpendicular al eje de simetría por ***V*** (cir. Principal.). Hallamos ***P'***, simétrico de ***P*** y desde ***P*** y ***P'*** trazamos perpendiculares a la cir. principal encontrando ***M*** y ***M'***. Dividimos los segmentos ***P'M'*** y ***PM*** en partes iguales y hacemos lo mismo con los segmentos ***VM*** y ***VM'***.
2. Hallamos puntos de la parábola en las intersecciones de las rectas desde ***V*** a las divisiones con las perpendiculares trazadas a la cir. principal.
3. Trazamos la parábola.

## 2.2.3 Tangente y normal a la parábola por un punto P de ella



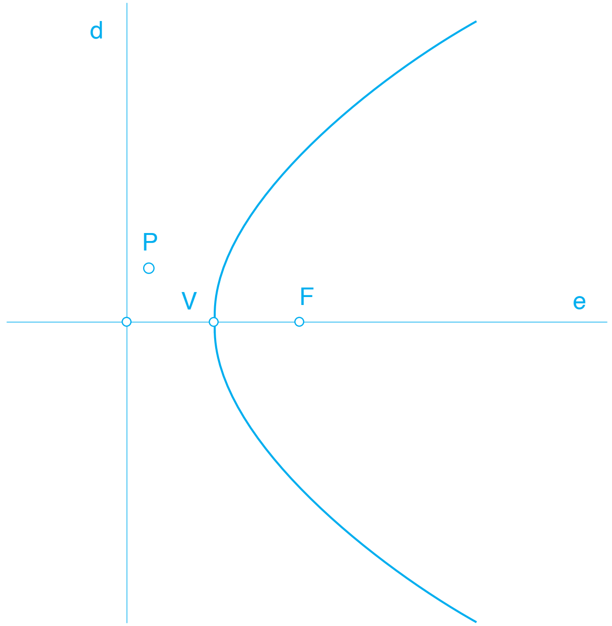

- La recta **tangente** a una parábola en un punto ***P*** de ella es la recta ***t***, bisectriz exterior del ángulo formado por los dos radios vectores ***PF*** y ***PF'***.
- La **normal** a la parábola en el punto ***P*** es la perpendicular a la tangente.

1. Determinar ***F'*** en la perpendicular a ***d*** dede el punto P.
2. Unimos ***P*** con ***F*** y ***F'*** , la mediatriz del ángulo que forman es la tangente buscada.
3. La normal se halla trazando la perpendicular a la tangente por ***P.***

El simétrico de F con respecto a la recta tangente, pertenece a la directriz. También se puede determinar la tangente dibujando la mediatriz del segmento ***F*** y ***F'***

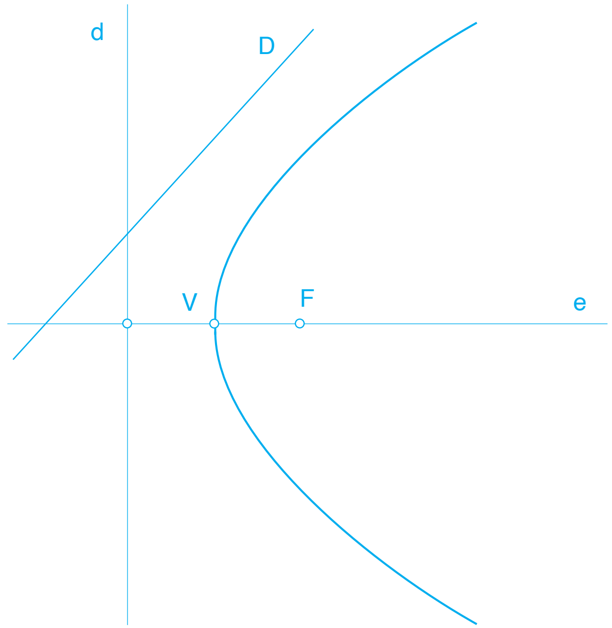
### 2.2.4 Tangente a la parábola por un punto exterior ella

1. Trazamos la circunferencia de centro ***P*** y radio ***PF*** cortando en los puntos ***M*** y ***N*** a la directriz.
2. Unimos los puntos ***M*** y ***N*** con ***F*** y hallamos las mediatrices de ***MF*** y ***NF*** que serán las tangentes que pasan por el punto ***P***.
3. Los puntos de tangencia los obtenemos en las intersecciones de las rectas perpendiculares a la directriz por ***M*** y ***N*** con las tangentes.




### 2.2.5 Tangente a la parábola paralelas a una dirección dada

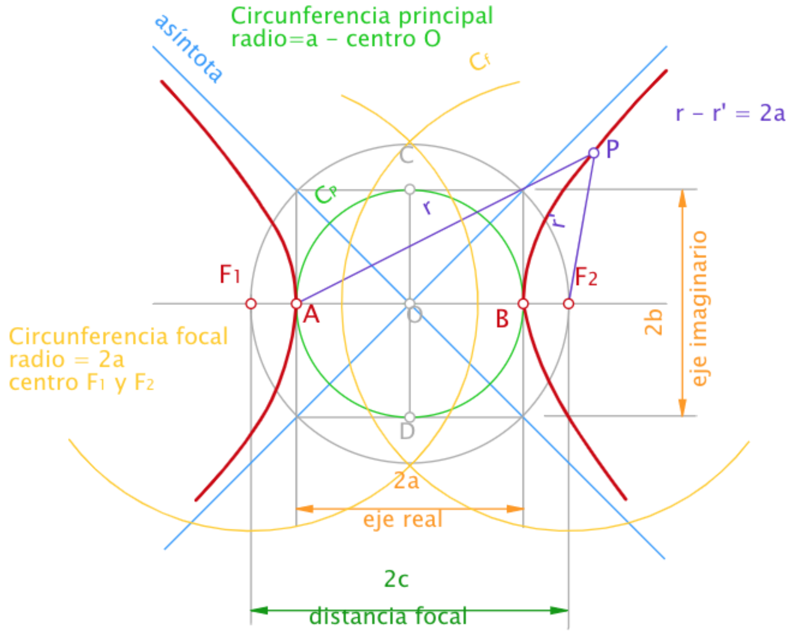
1. Dibujamos la perpendicular a la dirección por ***F*** que corta en ***M*** a la directriz.
2. La tangente es la mediatriz del segmento ***FM***.
3. El punto de tangencia los obtenemos en las intersección de la perpendicular a ***d*** por ***M***.



## 2.3. HIPÉRBOLA

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas; se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos, fijos, $F_1$ y $F_2$, llamados focos, es constante e igual a 2a, siendo 2a la longitud del eje real AB de la hipérbola.

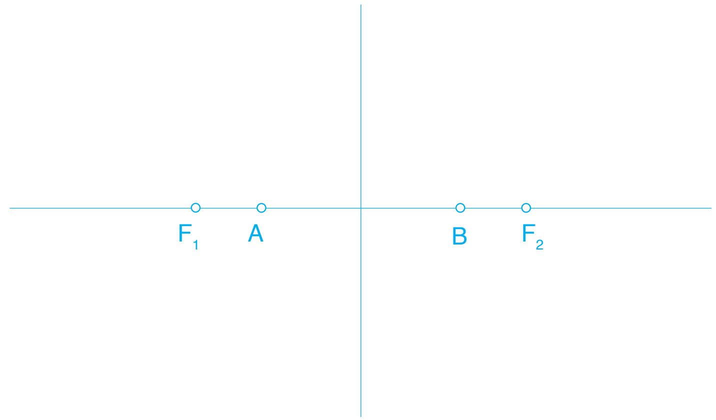
- Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje AB se llama **eje real** y se representa por **2a**. El eje **CD** se representa por 2b y se llama imaginario porque no tiene puntos comunes con la curva. Los **focos** están en el eje real. La **distancia focal** $F_1$-$F_2$ se representa por **2c**.
- Entre a, b y c existe la relación: $c^2=a^2+b^2$.
- La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes, y por lo tanto, respecto del centro O.
- Las rectas que unen un punto T de la curva con los dos focos, se llaman **radios vectores,** r y r' y por la definición se verifica: **r-r'=2a**
- La **circunferencia principal** c.p. de la hipérbola es la que tiene por centro O y radio a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes.
- Las **circunferencias focales** c.d. de la hipérbola tienen por centro uno de los focos y radio 2a. Son lugar geométrico de los simétricos del otro foco con respecto a las tangentes.
- Las **asíntotas** de la hipérbola son las tangentes a la curva en los puntos del infinito. Estas asíntotas son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro de la curva.




### 2.3.1 Construcción de la hipérbola conocidos los vértices A y B y los focos $F_1$ y $F_2$

Los datos son: ***AB = 2a*** y ***$F_1$ $F_2$ = 2c***:

1. Se elige un punto ***1*** cualquiera en el eje real, situado a la derecha del foco de la derecha o a la izquierda del foco de la izquierda.
2. Con centros en ***$F_1$*** y ***$F_2$*** y radios ***A1*** y ***B1*** respectivamente se trazan los arcos que se cortan en el punto ***M*** de la curva. Se verifica que: ***$MF_1$ – $MF_2$ = 2a = AB***.
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos 2, 3, etc., se obtienen puntos que, unidos posteriormente con plantilla o a mano, nos definen la hipérbola.

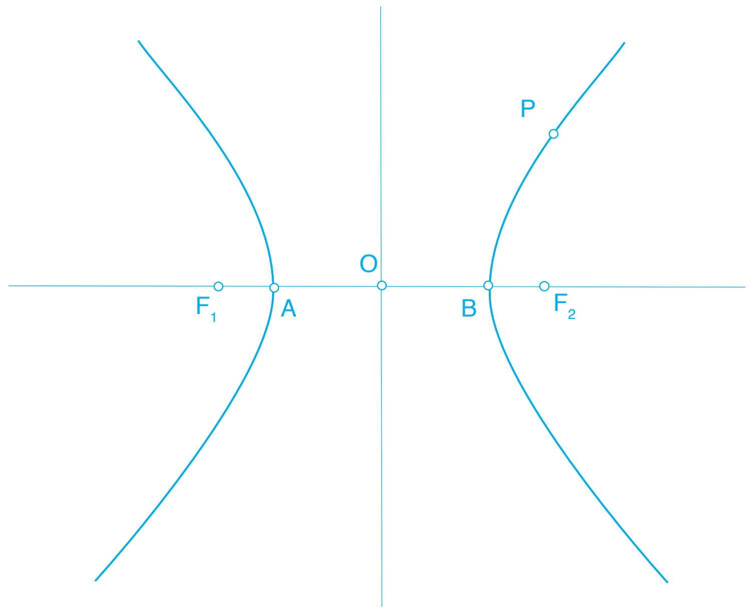


### 2.3.2 Tangente y normal a la hipérbola por un punto P de ella

- La recta **tangente** a una hipérbola en un punto ***P*** de ella es la recta ***t***, bisectriz exterior del ángulo formado por los dos radios vectores $PF_1$ y $PF_2$.
- La **normal** a la elipse en el punto ***P*** es la perpendicular a la tangente.

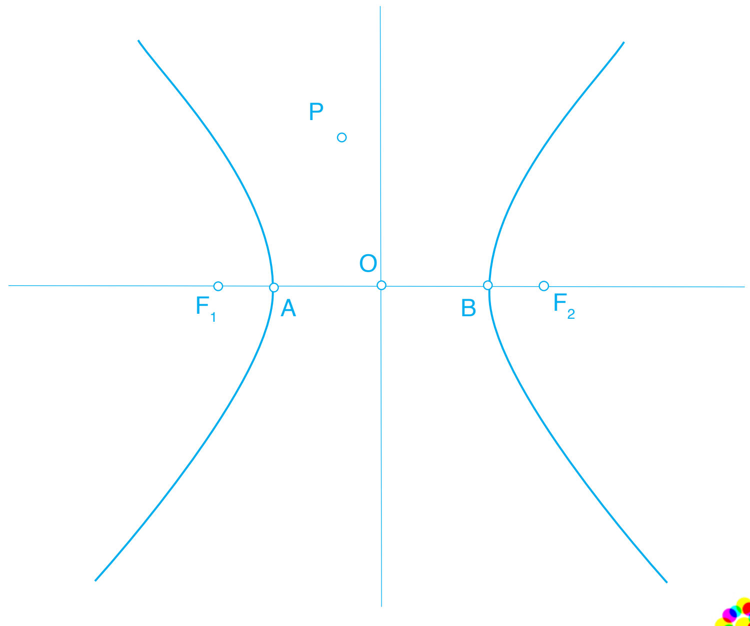
1. Unimos el punto ***P*** con $F_1$ y $F_2$ .
2. La tangente será la bisectriz formada por los segmentos $PF_1$ y $PF_2$.
3. La normal se traza perpendicular a ***t*** por el punto ***P.***

El punto simétrico de un foco con respecto a la recta tangente, está en la circunferencia focal trazada desde el otro foco.



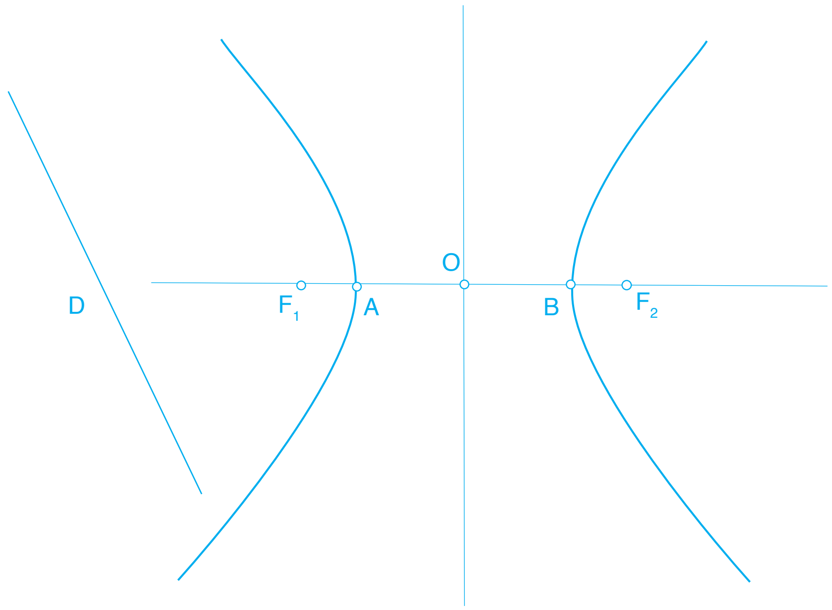

### 2.3.3 Tangentes a la hipérbola por un punto exterior ella

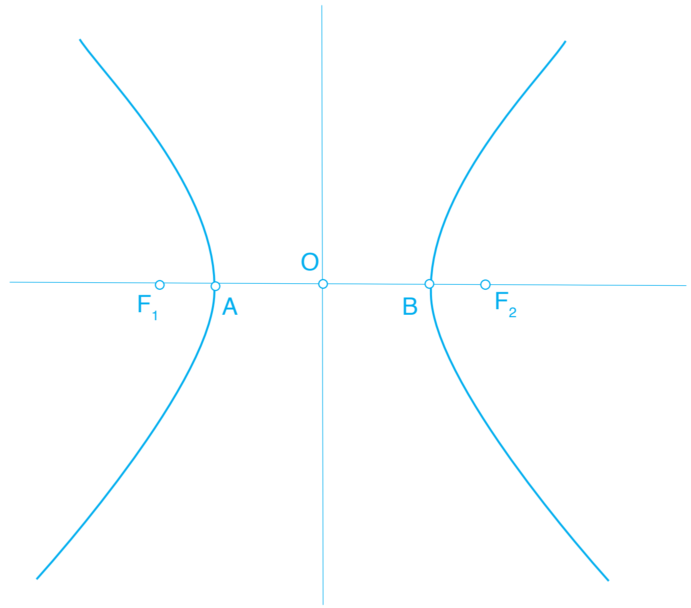
1. Trazamos la circunferencia focal de centro $F_2$ y la circunferencia de centro ***P*** y radio $PF_1$ cortándose en los puntos ***M*** y ***N.***
2. Trazamos las mediatrices de $MF_1$ y $NF_1$ que serán las tangentes buscadas.
3. Los puntos de tangencia quedan determinados en la intersección de las rectas $F_2N$ y $F_2M$ con las rectas tangentes.



### 2.3.4 Tangentes a la hipérbola paralelas a una dirección dada

1. Dibujamos la perpendicular a la dirección por $F_2$ que corta en ***M*** y ***N*** a la circunferencia focal de centro $F_1$.
2. La tangente son las mediatrices de $MF_2$ y $NF_2$.
3. Los puntos de tangencia los obtenemos en las intersección de las rectas que unen $MF_1$ y $NF_1$.




### 2.3.5 Trazado de las asíntotas de una hipérbola

Se puede proceder como en el caso de tangente desde un punto exterior ya que las asintotas son las tangentes a la curva desde el centro ***O***.
Se simplifica en trazado hallando los puntos de intersección de la circunferencia de centro ***O*** y radio $OF_1$, con las perpendiculares trazadas por ***A*** y ***B***. Estos puntos unidos con ***O*** nos determinan las asíntotas buscadas.